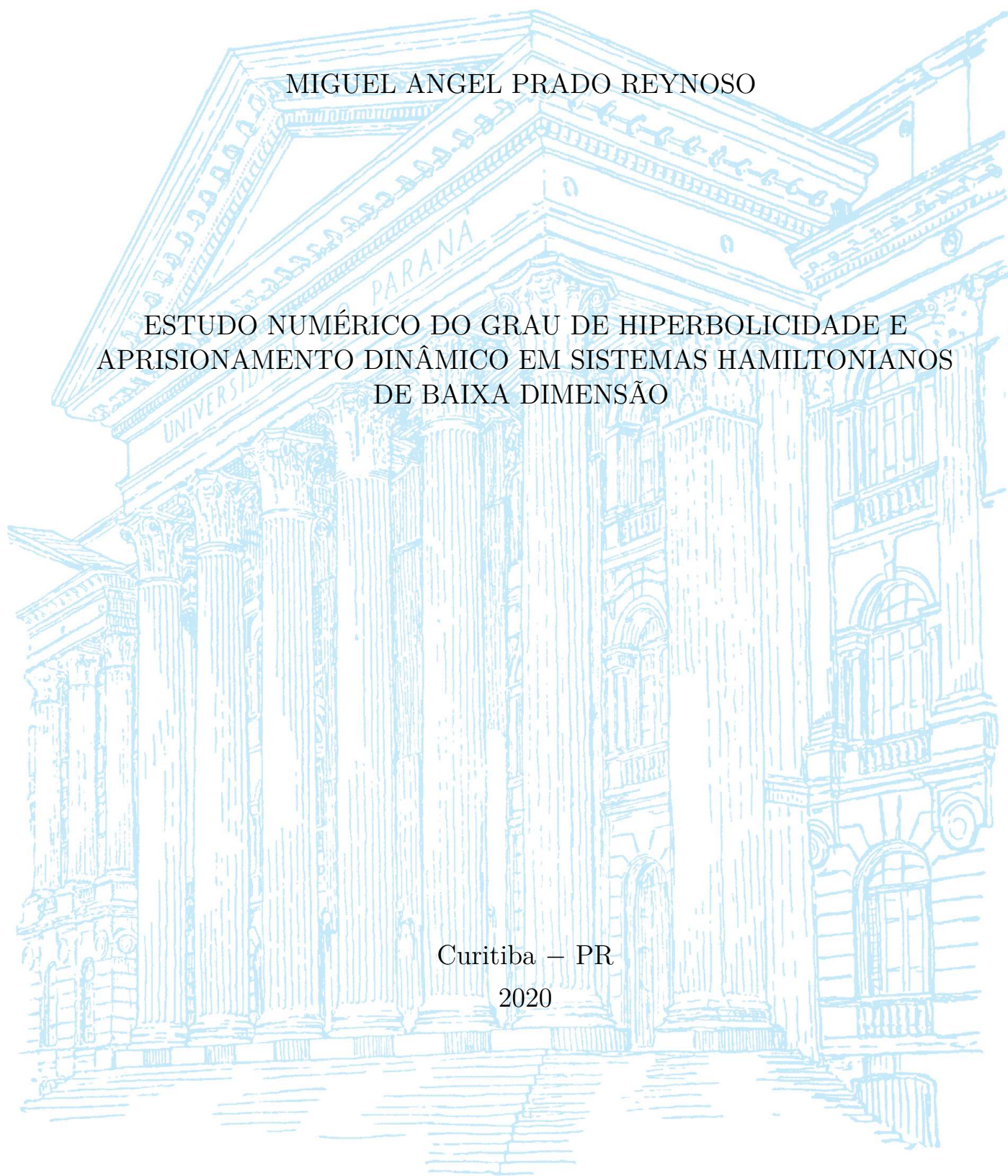


UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

MIGUEL ANGEL PRADO REYNOSO

ESTUDO NUMÉRICO DO GRAU DE HIPERBOLICIDADE E  
APRISIONAMENTO DINÂMICO EM SISTEMAS HAMILTONIANOS  
DE BAIXA DIMENSÃO

Curitiba – PR  
2020



MIGUEL ANGEL PRADO REYNOSO

ESTUDO NUMÉRICO DO GRAU DE HIPERBOLICIDADE E  
APRISIONAMENTO DINÂMICO EM SISTEMAS HAMILTONIANOS  
DE BAIXA DIMENSÃO

Tese apresentada ao curso de Pós-Graduação em Física, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Física.

**Orientador:** Prof. Dr. Marcus Werner Beims.

Curitiba — PR

2020

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR  
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

R466e

Reynoso, Miguel Angel Prado

Estudo numérico do grau de hiperbolicidade e aprisionamento dinâmico em sistemas hamiltonianos de baixa dimensão [recurso eletrônico] / Miguel Angel Prado Reynoso. – Curitiba, 2020.

Tese - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2020.

Orientador: Marcus Werner Beims.

1. Sistemas hamiltonianos. 2. Comportamento caótico nos sistemas. I. Universidade Federal do Paraná. II. Beims, Marcus Werner. III. Título.

CDD: 530.12

Bibliotecária: Vanusa Maciel CRB- 9/1928

## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em FÍSICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **MIGUEL ANGEL PRADO REYNOSO** intitulada: "**Estudo numérico do grau de hiperbolicidade e aprisionamento dinâmico em sistemas hamiltonianos de baixa dimensão**", que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 29 de Outubro de 2020.

Assinatura Eletrônica

30/10/2020 05:08:38.0

MARCUS WERNER BEIMS

Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

31/10/2020 20:59:13.0

EDUARDO GOLDANI ALTMANN

Avaliador Externo (THE UNIVERSITY OF SYDNEY)

Assinatura Eletrônica

05/11/2020 19:52:58.0

CÉLIA BEATRIZ ANTENEODO DE PORTO

Avaliador Externo (PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO )

Assinatura Eletrônica

29/10/2020 22:36:18.0

RICARDO LUIZ VIANA

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

30/10/2020 15:10:12.0

CESAR MANCHEIN

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA)



*Dedicada aos meus pais*  
*Martha Reynoso (1966-2018)*  
*Raul Prado*

---

# Agradecimentos

---

Agradeço a todos aqueles que, de alguma forma, direta ou indiretamente contribuíram para realização deste trabalho:

- Ao professor Marcus W. Beims pela paciência, ensinamentos e orientação ao longo desta etapa,
- Aos professores Rafael Marques Da Silva e Thomas Gorin pelos conselhos e discussões produtivas e sugestões,
- A minha família pelo incentivo e apoio incondicional que sempre me deram, e pelos valores que me foram passados,
- Aos meus amigos pelo apoio e bons conselhos, que colaboraram grandemente para o meu desenvolvimento acadêmico e pessoal,
- Aos professores membros da banca, pelas correções e sugestões dadas ao trabalho,
- À UFPR e ao Laboratório de Física Teórica Computacional, pelo suporte computacional,
- À CAPES, pelo apoio financeiro.

# RESUMO

O tema principal desenvolvido nesta tese é o estudo das propriedades dinâmicas das regiões caóticas de sistemas Hamiltonianos. Focamos em dois objetivos: (i) quantificar o grau de hiperbolicidade de regiões específicas do espaço de fase e (ii) caracterizar o efeito de aprisionamento dinâmico. A principal característica das regiões hiperbólicas caóticas é a estabilidade global da dinâmica, coexistindo com a instabilidade das órbitas individuais. Para sistemas Hamiltonianos, isto implica em dinâmicas extremamente complicadas. Aqui, propomos medidas explícitas de hiperbolicidade semi local, aplicáveis a regiões específicas do espaço de fase e das janelas de tempo. O fato das medidas dependerem da região no espaço de fase e tempo, nos permite diferenciar comportamentos dinâmicos entre regiões específicas e em diferentes escalas de tempo. Os resultados numéricos mostram que regiões caóticas em torno de ilhas de regulares são localmente menos hiperbólicas do que regiões próximas a pontos hiperbólicos periódicos, além disso, as medidas são sensíveis às características dos pontos periódicos hiperbólicos e das ilhas regulares. As medições são baseadas nas relações de expansão/contração dos subespaços de Oseledec e nos ângulos locais e médios entre esses subespaços. A invariância temporal dos subespaços de Oseledec fornece observáveis para uma teoria de tempo finito, por exemplo, eles definem formalmente expoentes de Lyapunov a tempo finito (FTLEs, *das siglas em inglês*). As medidas foram definidas de forma geral, aplicáveis a sistemas Hamiltonianos de dimensão finita, e o estudo numérico foi realizado para o mapa padrão. No caso de aprisionamento dinâmico, mostramos que funções apropriadas dos FTLEs e dos ângulos entre subespaços podem caracterizar o efeito de aprisionamento dinâmico. Essas distribuições são estudadas em função de janelas de tempo, o que permitiu descrever o comportamento das distribuições, sendo estas multimodais. As modas são associados a regiões específicas do espaço de fase, isto é, uma mesma moda pode ser associado a uma camada caótica ou curvas assintóticas instáveis no espaço de fase. Mostramos isso estudando em paralelo a geometria das estruturas dessas quantidades no espaço de fase. O estudo numérico do aprisionamento dinâmico foi realizado no mapa padrão (sistema a tempo discreto) e no sistema Hénon-Heiles (sistema a tempo contínuo). Ambos os casos apresentam comportamentos similares nas distribuições. Finalmente, estudamos a distribuição dos ângulos entre os subespaços Oseledec em diferentes regimes de movimento. Esses regimes são definidos a partir dos FTLEs em trajetórias caóticas. Os resultados mostram desvios de hiperbolicidade entre esses regimes.

**Palavras-chave:** Hiperbolicidade, medidas, aprisionamento dinâmico, expoentes de Lyapunov a tempo finito, subespaços de Oseledec

# ABSTRACT

The main subjects developed in this thesis are the dynamical properties of chaotic regions in Hamiltonian systems. We focused on two objectives: (i) quantifying the degree of hyperbolicity of specific regions of the phase space and (ii) the characterization of sticky motion. The main characteristic of the chaotic hyperbolic regions is the global stability of the dynamics, coexisting with the instability of the individual orbits. For Hamiltonian systems, this implies an extremely complicated dynamics. Here, we propose explicit measures of semi-local hyperbolicity, applicable to specific regions of the phase space and time windows. The fact that the measures depend on the region in the phase space and time, allows us to differentiate the dynamical behaviors between specific regions and at different time scales. Numerical results show that chaotic regions around regular islands are locally less hyperbolic than regions close to periodic hyperbolic points, in addition, the measures are sensitive to the characteristics of the hyperbolic periodic points and the regular islands. The measurements are based on the expansion/contraction ratios of the Oseledec subspaces and on the local and average angles between them. The temporal invariance of the Oseledec subspaces provide observables for a finite time theory, for example, they formally define finite time Lyapunov exponents (FTLEs). The measures were defined in general, applied to Hamiltonian systems of finite dimension, and the numerical study was carried out for the standard map. In the case of stickiness, we show that appropriate functions of FTLEs and angles between subspaces can characterize the phenomenon of stickiness. These distributions are studied as a function of a time windows. This allowed us to describe the behavior of the distributions, as being multimodal. Modes are associated with specific regions of the phase space, but a mode can be associated with one or more specific regions of the phase space. We show this by studying in parallel the geometry of the structures of these quantities in the phase space. The numerical study of stickiness was performed on the standard map (discrete system) and the Hénon-Heiles system (continuous system). Both cases show similar behavior in the distributions. Finally, we studied the distribution of the angles between Oseledec subspaces in different regimes. These regimes are defined based on FTLEs in chaotic trajectories. The results show deviations of hyperbolicity between these regimes.

**Keywords:** Hyperbolicity, measurements, stickiness, finite time Lyapunov exponents, Oseledec's subspaces.

---

# Sumário

---

<b>1</b>	<b>Introdução . . . . .</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>Dinâmica em sistemas hamiltonianos. Caos conservativo . . . . .</b>	<b>16</b>
2.1	Mapas e fluxos . . . . .	17
2.1.1	De tempo contínuo a tempo discreto . . . . .	18
2.2	Linearização . . . . .	18
2.3	Sistemas conservativos . . . . .	19
2.4	Conceitos básicos da mecânica hamiltoniana . . . . .	20
2.5	Transição ao caos conservativo . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Decomposição de Oseledec. Noção de hiperbolicidade . . . . .</b>	<b>26</b>
3.1	Teorema de Oseledec $N$ -dimensional . . . . .	27
3.2	FTLEs e ângulos entre subespaços de Oseledec . . . . .	29
3.3	Cálculo numérico da decomposição de Oseledec . . . . .	31
3.4	Hiperbolicidade em sistemas lineares . . . . .	32
3.5	Hiperbolicidade local em sistemas não lineares . . . . .	33
3.6	Variedades estáveis e instáveis . . . . .	35
3.7	Decomposição de Oseledec dominada . . . . .	36
3.8	Conjuntos parcialmente hiperbólicos . . . . .	37
3.9	Geometria no espaço de fase . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Estatística local da decomposição de Oseledec . . . . .</b>	<b>39</b>
4.1	Sistema de Hénon-Heiles . . . . .	39
4.2	Dinâmica no espaço de fase . . . . .	41
4.3	Teorema de Oseledec para sistemas hamiltonianos quadrimensionais . . . . .	43
4.4	FTLEs locais no sistema de Hénon-Heiles . . . . .	44
4.5	Ângulos entre subespaços . . . . .	45
4.6	Rotor pulsado . . . . .	47
4.7	Transição à dinâmica caótica . . . . .	48
4.8	Decomposição de Oseledec para o mapa padrão . . . . .	51
4.9	Estatísticas dos FTLEs locais . . . . .	52
4.10	Distribuição de probabilidade conjunta . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Hierarquia de aprisionamento dinâmico . . . . .</b>	<b>61</b>
5.1	Aprisionamento dinâmico em sistemas conservativos . . . . .	61
5.2	Caracterização de aprisionamento dinâmico . . . . .	62
5.2.1	Hierarquia de aprisionamento dinâmico e as distribuições dos FTLEs . . . . .	63
5.3	Aprisionamento dinâmico no sistema Hénon-Heiles . . . . .	63
5.4	Aprisionamento dinâmico no mapa padrão . . . . .	66



5.5	Aprisionamento dinâmico em caos global . . . . .	68
5.6	Aprisionamento dinâmico em caos local . . . . .	71
5.7	Divisão das regiões caóticas . . . . .	75
<b>6</b>	<b>Hiperbolicidade parcial dentro de regimes de movimento em sistemas Hamiltonianos . . . . .</b>	<b>79</b>
6.1	Definição dos regimes . . . . .	79
6.2	O modelo de mapas acoplados . . . . .	80
6.3	Sistema Hénon-Heiles . . . . .	84
<b>7</b>	<b>Medidas do grau de hiperbolicidade parcial . . . . .</b>	<b>88</b>
7.1	Conjuntos de probabilidade total . . . . .	88
7.2	Conjunto $(\tau, \epsilon)$ -parcialmente hiperbólico . . . . .	89
7.3	Quantificadores da hiperbolicidade parcial . . . . .	91
7.4	Quantificador da $(\tau, \epsilon)$ -hiperbolicidade parcial absoluta . . . . .	92
7.5	Quantificador da $(\tau, \epsilon)$ -hiperbolicidade parcial relativa . . . . .	93
7.6	Definição explícita da função $\varphi_{\tau, x}$ . . . . .	93
7.6.1	Função um, $\varphi_{\tau, x}^{(1)}$ . . . . .	94
7.6.2	Função dois, $\varphi_{\tau, x}^{(2)}$ . . . . .	95
7.6.3	Função três, $\varphi_{\tau, x}^{(3)}$ . . . . .	95
7.7	Quantificadores explícitos do grau da hiperbolicidade parcial . . . . .	96
7.8	Quantificadores da $(\tau, \epsilon)$ -hiperbolicidade . . . . .	97
7.9	Hiperbolicidade no sistema Hénon-Heiles . . . . .	97
7.10	Hiperbolicidade no mapa padrão . . . . .	99
7.11	Medida de probabilidade total para $\Lambda^{(i)}$ . . . . .	100
7.12	Quantificadores da hiperbolicidade para o mapa padrão . . . . .	100
7.13	Resultados da $\tau$ -hiperbolicidade para o conjunto total . . . . .	101
7.14	Resultados da $\tau$ -hiperbolicidade para regiões com $\mu(S) < 1$ . . . . .	105
7.14.1	$\tau$ -hiperbolicidade em função da distância a PPH . . . . .	107
7.14.2	$\tau$ -Hiperbolicidade em torno de ilhas de regularidade . . . . .	109
7.15	Geometria da hiperbolicidade . . . . .	111
7.16	Refinamento e quantificadores da não hiperbolicidade . . . . .	115
<b>8</b>	<b>Considerações finais . . . . .</b>	<b>117</b>
	<b>Referências . . . . .</b>	<b>123</b>
	<b>Apêndices . . . . .</b>	<b>131</b>
	<b>APÊNDICE A Esquemas numéricos . . . . .</b>	<b>132</b>
A.1	Algoritmo dinâmico para o cálculo dos CLVs . . . . .	132

---

A.2	Recorrências do CLVs para o mapa padrão . . . . .	136
A.2.1	Construção das relações de recorrências para a evolução para frente	137
A.2.2	Construção das relações de recorrências para a evolução para trás .	139

---

# 1. Introdução

---

Grande parte dos sistemas de interesse físico podem ser descritos por uma função hamiltoniana cuja dinâmica é conservativa e invertível, tais como, sistemas planetários, fluidos, interação de partículas, sistemas de plasma para mencionar alguns [1–6]. Tipicamente estes sistemas têm um espaço de fase misto, onde as dinâmicas regulares e caóticas coexistem. Existem várias definições (não equivalentes) do que é uma dinâmica caótica [7–11], porém, consideramos que os seguintes três ingredientes são necessários para dizer que uma dinâmica pode ser considerada caótica: (i) apresenta não linearidade em suas equações de movimento, (ii) extrema sensibilidade às perturbações infinitesimais de suas condições iniciais e (iii) a grande dificuldade de previsão para tempos longos.

Em sistemas hamiltonianos conservativos com espaço de fase misto, as propriedades dinâmicas tornam-se muito complicadas, em particular, pode ser observado o efeito de *aprisionamento dinâmico* (*stickiness*). De forma geral, o aprisionamento dinâmico é um confinamento temporário de órbitas em uma região particular do espaço de fase por um tempo grande antes de se difundir para uma região maior, afetando o transporte de partículas [12, 13]. A análise e a caracterização do aprisionamento dinâmico tem sido objeto de intensa investigação ao longo de muitos anos. Para a caracterização do aprisionamento dinâmico várias técnicas são utilizadas [14], tais como: tempos de escape de uma determinada região no espaço de fase [15–17], expoentes de Lyapunov a tempo finito (FTLEs) [18–26], hiperbolicidade e ângulos entre subespaços [27–29], gráficos de recorrências [30], estatísticas das recorrências [31–33], número de rotação [34] e análise das estruturas de componentes caóticos [14, 35]. Os primeiros trabalhos nos quais observou-se o efeito de aprisionamento dinâmico datam dos anos setenta [36–41]. Embora o mecanismo de aprisionamento dinâmico em problemas bidimensionais seja bem compreendido [42], este mecanismo em dimensão superior ainda esta sob investigação. Teorias sobre o aprisionamento dinâmico podem ser encontradas em [14, 15, 22, 23, 40–50].

Parte deste trabalho vai ser dedicado ao estudo numérico deste efeito em regiões caóticas de sistemas hamiltonianos de baixa dimensão, para isto, fizemos uso dos FTLEs. No estudo de regiões caóticas em sistemas hamiltonianos, uma ferramenta bem conhecida é o uso dos expoentes de Lyapunov. De forma intuitiva, os expoentes de Lyapunov dão uma caracterização da taxa da expansão (contração) assintótica de perturbações infinitesimais das trajetórias. Em geral, os expoentes assintóticos dependem das condições iniciais e da direção da perturbação. O conjunto de todas as direções da perturbação de um ponto  $x$  no espaço de fase, define o espaço tangente,  $T_x M$ , associado a  $x$ , e o conjunto de

todos os espaços tangentes,  $T_x M$ , define o fibrado tangente [7, 51, 52]. Formalmente, as bases teóricas para definir os expoentes de Lyapunov e os FTLEs são dadas através do teorema de Oseledec. O teorema de Oseledec fornece as condições necessárias para a existência da decomposição do fibrado tangente denominado *decomposição de Oseledec*. Essa decomposição fornece requisitos suficientes para encontrar subespaços no fibrado tangente associados aos expoentes de Lyapunov, esses subespaços são chamados de *subespaços de Oseledec*. Tais subespaços não são invariantes perante uma rotação do sistema, porém, são invariantes com a evolução temporal e independentes da norma, em consequência, fornecem informação direta das direções de expansão e contração do sistema. [53–57]. Os FTLEs serão os observáveis na caracterização da dinâmica Hamiltoniana. Outros observáveis que usaremos vão ser os ângulos entre os subespaços de Oseledec.

Assim, um dos objetivos desta tese é caracterizar o efeito de aprisionamento dinâmico através das distribuições dos FTLEs, os ângulos entre os subespaços de Oseledec. Estes observáveis dependem de uma janela temporal, o que permite estudar o aprisionamento dinâmico em diferentes escalas temporais que podem ser associados a diferentes camadas caóticas entorno de regiões regulares ou curvas assintóticas instáveis no espaço de fase.

A segunda parte desta tese será dedicada ao estudo da hiperbolicidade para sistemas hamiltonianos, sendo esta a contribuição mais relevante do trabalho. A noção de hiperbolicidade em sistemas dinâmicos é uma questão interessante, que está sempre relacionado à ideia de contração e expansão exponencial de distâncias, porém, pode ter diferentes sentidos em diferentes contextos. Em particular, um conjunto invariante sobre a dinâmica é hiperbólico se o fibrado tangente pode ser dividido em dois subespaços que são contraídos, respectivamente, sobre a dinâmica para frente e para trás [7, 58, 59]. Além disso, a hiperbolicidade está estreitamente relacionado com a estabilidade do sistema ou de trajetórias individuais. Hiperbolicidade implica na existência de conjuntos estruturalmente estáveis que são insensíveis às variações de parâmetros, porém órbitas individuais são instáveis, o que torna o sistema extremamente complicado. Em particular, dinâmicas caóticas podem ser tratadas através da noção de hiperbolicidade [57].

Dado que a propriedade de hiperbolicidade não é típica, o conceito da hiperbolicidade tem sido ampliado para descrever uma maior gama de sistemas, tais como, sistemas parcialmente hiperbólicos, ou sistemas não-uniformemente hiperbólicos. Sistemas dinâmicos em geral não são hiperbólicos, mas apresentam características similares a estes, assim, uma questão interessante é saber o grau de hiperbolicidade (ou grau de violação da hiperbolicidade) de um sistema dinâmico em comparação com outros sistemas, a mudança de parâmetros ou entre diferentes regiões do espaço de fase [57, 60–64].

As distribuições de probabilidade do ângulo local entre os diferentes subespaços de Oseledec têm sido usadas para definir quantificadores do grau de hiperbolicidade [64–70].

Porém, propomos quantificadores para o grau da hiperbolicidade baseados não só em ângulos entre subespaços instáveis e estáveis, como também nas taxas de expansão/contração e a dimensão dos subespaços de Oseledec. Além disso, as medidas de hiperbolicidade dependerão de uma janela temporal,  $\tau$ , que nos permitirá avaliar a hiperbolicidade para diferentes escalas temporais. Além disso, estudamos a geometria das estruturas dos valores dos FTLEs e os ângulos entre os subespaços de Oseledec no espaço de fase, isto nos permitirá descrever as diferenças do grau de hiperbolicidade entre diferentes regiões do espaço de fase.

Estudamos a hiperbolicidade em dois diferentes contextos. (1) No primeiro deles, vamos caracterizar variações da hiperbolicidade em diferentes regimes de trajetórias caóticas. (2) O segundo contexto é mais claro, propomos três funções para quantificar o grau da hiperbolicidade de regiões específicas do espaço de fase. O primeiro contexto é o seguinte: usando o espectro dos FTLEs [71–73], o efeito de aprisionamento dinâmico foi classificado em distintos regimes de movimento dentro de uma janela de tempo [74]. Quando todos os FTLEs são zero, temos um regime ordenado, porém quando todos são positivos, o regime é caótico. Temos regimes que são chamados de semiordenados, quando há FTLEs nulos e positivos [74]. Esta classificação foi aplicada recentemente na compreensão da dinâmica em sistemas hamiltonianos fracamente caóticos de dimensão superior: como um procedimento de filtragem para o aumento substancial na caracterização do movimento de aprisionamento dinâmico [75], e para descrever a sincronização de aprisionamento dinâmico intermitente [22].

Aplicamos o nosso estudo do efeito de aprisionamento dinâmico e da hiperbolicidade em dois sistemas hamiltonianos de baixa dimensão. O mapa padrão sendo um sistema discreto bidimensional e o sistema de Hénon-Heiles como sistema contínuo. O estudo numérico vai ser focado com maiores detalhes para o mapa padrão.

As descrições aqui propostas ajudam a entender as características importantes da geometria e dinâmica de regiões caóticas específicas, fornecendo dessa forma, uma espécie de ferramenta de visualização para perceber o que acontece no espaço de fase e o fibrado tangente de sistemas de maior dimensão. Em particular, os principais resultados obtidos são os seguintes. Mostramos que para valores pequenos do parâmetro de não linearidade, não existe uma direção preferencial dos subespaços instáveis e estáveis para expandir ou contrair localmente, e enquanto o parâmetro ou a janela temporal aumenta, a probabilidade do subespaço instável (estável) de expandir (contrair) também aumenta. Se o ângulo entre os subespaços é próximo de zero, então os FTLEs ou a diferença dos FTLEs são próximos de zero.

As distribuições da diferença dos FTLEs e dos ângulos médios resultam ser multimodais, cujo comportamento das modas depende da janela temporal, a hierarquia das camadas caóticas e de curvas assintóticas instáveis. Relacionamos estas modas com



variações da hiperbolicidade do espaço de fase.

Evidenciamos variações da hiperbolicidade em regimes de movimento definidos em trajetória caótica, sendo menos hiperbólico o regimes ordenados que regimes semiordenados ou caóticos. A análise numérico da nossa proposta de quantificador da hiperbolicidade mostra que estes refletem propriedades esperadas sobre a hiperbolicidade. Regiões em torno de pontos periódicos hiperbólicos são mais hiperbólicas que as regiões mais afastadas destes, podendo diferenciar o grau da hiperbolicidade entre pontos periódicos hiperbólicos. Regiões em torno de ilhas de regularidade são menos hiperbólicas que regiões mais afastadas destas, além disso, os quantificadores são sensíveis à quantidade de ilhas e ao tamanho destas.

Em vista disso, nossas descrições são uma maneira promissora de combinar simulações numéricas e propriedades matemáticas para entender mais as propriedades complexas encontradas na dinâmica de sistemas Hamiltonianos de dimensões superiores. Em particular, isto é crucial para discutir fenômenos de transporte. Finalmente, as descrições da hiperbolicidade parcial podem ser ampliadas para outros sistemas dinâmicos tanto para sistemas conservativos como para sistemas dissipativos e para sistemas de maior dimensão finita, por exemplo, para atratores caóticos. Além disso, fazendo pequenas modificações, podemos construir quantificadores da violação da hiperbolicidade e da (violação da) dominação da decomposição de Oseledec.

Esta tese está organizada da seguinte forma. No capítulo 2 e 3, introduziremos os conceitos básicos de sistemas hamiltonianos, a teoria da decomposição de Oseledec (introduzindo os FTLEs e ângulos entre os subespaços) e a noção da dinâmica uniformemente hiperbólica. No capítulo 4, apresentamos os sistemas de estudo assim como um estudo estatístico dos FTLEs locais e os ângulos entre os subespaços. No capítulo 5, abordaremos o efeito de aprisionamento dinâmico. Finalmente os capítulos 6 e 7 serão dedicados à hiperbolicidade, a variação da hiperbolicidade em diferentes regimes através de trajetórias será tratada no capítulo 6, enquanto que no capítulo 7, propomos teoricamente os quantificadores do grau da hiperbolicidade aplicáveis a regiões caóticas específicas, assim como um estudo numérico mais detalhado.

---

## 2. Dinâmica em sistemas hamiltonianos. Caos conservativo

---

Começamos introduzindo brevemente alguns conceitos de sistemas dinâmicos, focando nos sistemas hamiltonianos. A noção mais geral de um sistema dinâmico determinístico inclui os seguintes ingredientes [62].

- Um *espaço de fase* ( $M$ ). O conjunto de *pontos* que representam todos os estados possíveis do sistema.
- *Tempo* ( $t$ ). Pode ser discreto,  $t \in \mathbb{Z}$ , ou contínuo,  $t \in \mathbb{R}$ , assim como apenas no futuro (processos irreversíveis ou não invertíveis) ou também no passado como no futuro (processos reversíveis ou invertíveis).
- A *lei da evolução temporal* ( $f$ ). Na forma mais geral, é uma aplicação matemática determinística, chamado *operador de evolução dinâmica do sistema*, que nos permite determinar o estado do sistema em cada instante de tempo  $t$  a partir de todos os estados anteriores. Assim, a lei mais geral da evolução temporal é dependente do tempo e com memória infinita.

O espaço de fase do sistema dinâmico,  $M$ , possui uma certa estrutura que a lei da evolução temporal,  $f : M \rightarrow M$ , deve respeitar. Diferentes estruturas dão origem a diferentes teorias de sistemas dinâmicos que preservam essas estruturas, por exemplo, dinâmica topológica, teoria ergódica, dinâmica diferenciável ou teoria ergódica suave, entre outras.

Vamos focar nosso estudo nas leis da evolução temporal que permitem definir todos os estados futuros (e todos os estados anteriores para sistemas reversíveis) dado o estado a qualquer momento. Também é assumido que a lei da evolução temporal não muda com o tempo, portanto, *a evolução do estado depende unicamente da condição inicial e da duração da evolução*.

Assim, se nosso sistema está inicialmente no estado  $x \in M$ , depois de um tempo  $t$  ele estará univocamente no estado  $f^t(x)$ . Ainda mais, a evolução do estado  $x$  para um tempo  $s + t$  pode ser obtido aplicando primeiramente a transformação  $f^t$  ao estado  $x$  e depois aplicando ao estado resultante  $f^t(x)$  a aplicação  $f^s$ , então temos  $f^{s+t}(x) = f^s(f^t(x))$ , ou em outras palavras, a transformação  $f^{s+t}$  é a composição das aplicações  $f^t$  e  $f^s$ .

$$f^0 = \mathbb{I}_M, \quad f^{s+t} = f^s \circ f^t \equiv f^s f^t, \quad (2.1)$$

onde  $\mathbb{I}_M$  é o operador identidade. A aplicação  $f : M \rightarrow M$  é um *homeomorfismo* se é contínua, bijetiva e cuja inversa também é contínua. Diz-se que a aplicação  $f$  é um *difeomorfismo* se também é diferenciável. *Nós lidamos apenas com difeomorfismos.*

Vamos introduzir duas classes de sistemas dinâmicos, os mapas que possuem evolução discreta e os fluxos que evoluem continuamente no tempo [7, 76]. As diferenças entre estes sistemas serão comentadas a seguir.

## 2.1 Mapas e fluxos

Denotamos de *mapa* o sistema dinâmico em que a lei de evolução temporal se dá através da iteração de uma função contínua  $f : M \rightarrow M$  que pode ser descrito por sua forma matricial como

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (2.2)$$

onde  $x_n$  tem  $N$  componentes,  $x_n \equiv \{x_n^1, \dots, x_n^N\}$  e a variável de tempo discreto é definida como sendo  $n \in \mathbb{Z}$ . A iteração  $x_{n+1} = f(x_n)$  gera uma sequência em  $M$ . Defina-se a *trajetória* de  $x$  pelo conjunto  $\{f^m(x) | m \in \mathbb{Z}\}$  onde  $f^m$  é a composição de  $f$  consigo mesmo  $m$  vezes. Que  $f$  seja um difeomorfismo implica que  $f^{-m} \equiv (f^{-1})^m$  [7].

Seja  $E$  um subconjunto aberto de  $M$  e  $f \in \mathcal{C}^1(E)$ , onde  $\mathcal{C}^1(E)$  é o conjunto de funções com primeira derivada contínua em  $E$ . Dada  $x_0 \in E$ , seja  $\varphi^t(x)$  a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x(0) = x, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

para  $t \in I(x) \subset \mathbb{R}$ , onde  $I(x)$  é o conjunto máximo de existência de  $\varphi^t(x)$ . Então o conjunto de mapeamento  $\varphi_t$  é chamado *o fluxo da equação diferencial (2.3)*. Pode-se demonstrar as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} (1) \quad & \varphi^0(x) = x, \\ (2) \quad & \varphi^s(\varphi^t(x)) = \varphi^{s+t}(x), \quad \forall s, t \in I(x), \\ (3) \quad & \varphi^{-t}(\varphi^t(x)) = \varphi^t(\varphi^{-t}(x)) = x, \quad \forall t \in I(x). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Se nós pensamos em  $x$  como condição inicial fixa, então o mapeamento  $\varphi^t(x) : I \rightarrow E$  define uma curva solução, ou *trajetória* do sistema (2.6) que passa pelo ponto  $x \in M$ . A trajetória é visualizada como um movimento ao longo da curva  $\Gamma$  passando pelo ponto  $x$  no subconjunto  $E$  do espaço de fase  $M$ . Enquanto que se  $x$  varia em um subconjunto de  $K \subset E$ , então o fluxo da equação diferencial (2.3),  $\varphi^t : K \rightarrow E$  pode ser visualizado como o movimento de todos os pontos no conjunto  $K$  [76].

Um *fluxo suave*  $f^t : M \rightarrow M$  é uma família de difeomorfismos que depende de uma maneira suave de um parâmetro  $t \in \mathbb{R}$  satisfazendo (2.3)-(2.4). Chamaremos apenas de fluxo a um fluxo suave.

**Pontos fixos e trajetórias periódicas.** Um ponto  $x^* \in M$  é chamado de ponto fixo ou estacionário do fluxo da eq. (2.3) se  $\varphi^t(x^*) = x^*$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , ou equivalentemente se  $f(x^*) = 0$ . Um ponto  $x^*$  é um ponto periódico da eq. (2.3) se,  $\varphi^T(x^*) = x^*$  onde  $T$  é o período de  $\varphi^t(x)$  e a trajetória é uma *trajetória periódica de período  $T$* .

Similarmente, nós podemos definir uma trajetória periódica para mapas com a forma da eq. (2.2). Um ponto  $x^* \in M$  é chamado de *ponto fixo* do mapa  $f$ , se  $f^1(x^*) = x^*$ . Um ponto  $x^* \in M$  é um ponto periódico do mapa  $f$  se  $\exists q \geq 1$  tal que  $f^q(x^*) = x^*$ .  $q$  é chamado o *período* do ponto  $x^*$ , diz-se que a trajetória  $\{x^*, f(x^*), \dots, f^{q-1}(x^*)\}$  é uma *trajetória periódica de período  $q$*  [7, 77].

### 2.1.1 De tempo contínuo a tempo discreto

Pode-se reduzir um fluxo (sistema de tempo contínuo) a um mapa (sistema de tempo discreto) através das seguintes construções apresentadas.

**Seção de Poincaré.** O *mapa de Poincaré* representa uma redução do fluxo  $f : M \rightarrow M$ ,  $N$ -dimensional a um mapa  $(N - 1)$ -dimensional. Considerando uma solução do fluxo e uma apropriada superfície  $(N - 1)$ -dimensional, o mapa de Poincaré é composto pelos sucessivos cruzamentos da trajetória ao evolui-la no tempo com a superfície de seção, chamada *seção de Poincaré*. A escolha da seção depende de cada problema em particular.

**Mapa estroboscópico.** Outra maneira de criar um mapa a partir de um fluxo é através da amostragem do fluxo a tempo discreto  $t_n = t_0 + nT$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), onde o intervalo de amostragem  $T$  é convenientemente escolhido. Então, uma trajetória no tempo contínuo  $x(t)$  gera uma trajetória no tempo discreto  $x_n \equiv x(t_n)$ , obtendo cada iteração através da integração das equações. Portanto, em princípio temos um mapa  $x_{n+1} = \tilde{f}(x_n)$ , chamado *mapa estroboscópico*. O mapa estroboscópico mantém a dimensionalidade do fluxo. No painel esquerdo da Fig. 1 um exemplo de um fluxo 3-dimensional mapeado a uma seção 2-dimensional é exibido, enquanto o lado direito da Fig. 1 mostra um mapa estroboscópico num espaço de fase 3-dimensional [7, 78].

## 2.2 Linearização

Seja  $U \subset \mathbb{R}^N$  uma vizinhança aberta de  $x_0$  e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^N$  um mapa diferenciável  $N$ -dimensional, podemos representar  $f$  perto do ponto  $x_0$  como a parte constante  $f(x_0)$ , mais a parte linear  $D_{x_0}f(x - x_0)$ , mais termos de ordem superior. A diferenciável  $D_{x_0}f$  é um operador linear em  $\mathbb{R}^N$  que é representado a partir de uma matriz de derivadas parciais. Se  $f(t_j) = \{f^i(t_j)\}_{i,j=1,\dots,N}$  então

$$D_{x_0}f = \left( \frac{\partial f_i}{\partial t_j} \right)_{i,j=1,\dots,N} \quad (2.5)$$

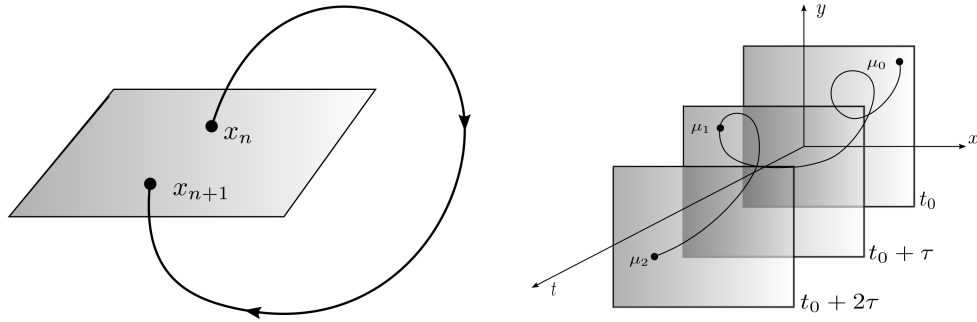


Figura 1 – Esquerdo: construção da seção de Poincaré,  $\{x_n\}$ , a partir de um fluxo tridimensional. Direita: esquema de um T-map,  $\{\mu_n\}$ , usando um tempo  $\tau$ .

onde as derivadas parciais são calculados no ponto  $x_0$ . De forma equivalente, a diferenciável  $D_{x_0}f$  do mapa  $f : M \rightarrow M$  pode ser descrita como um mapa linear do espaço tangente  $T_x M$  para o espaço  $T_{f(x)} M$ . Se  $f$  é um difeomorfismo então a diferenciável é invertível.

Usando a estrutura diferenciável de  $M$ , pode se globalizar esta construção considerando o fibrado tangente  $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$ , composto pela união de todos os espaços tangentes. Quando consideramos iterações de um mapa  $f$ , a diferenciável  $D_x f^n : T_x M \rightarrow T_{f^n(x)} M$  da  $n$ -ésima iteração é uma composição dos diferenciais  $D_{f^i(x)} f : T_{f^i(x)} M \rightarrow T_{f^{i+1}(x)} M$ , com  $i = 0, \dots, n-1$ :

$$T_x M \xrightarrow{D_x f} T_{f(x)} M \xrightarrow{D_{f(x)} f} T_{f^2(x)} M \xrightarrow{D_{f^2(x)} f} \cdots \xrightarrow{D_{f^{n-1}(x)} f} T_{f^n(x)} M. \quad (2.6)$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{D_x f^n}$

Nesta imagem local as propriedades assintóticas de  $f$  correspondem às propriedades dos produtos de mapa lineares (2.6), quando o número de fatores vão para infinito. O diferencial em qualquer ponto se aproxima bem do comportamento dos pontos próximos ao ponto no qual a diferencial tem sido calculada. A qualidade dessa aproximação depende dos termos não lineares, por exemplo, do tamanho da segunda derivada do ponto inicial de referência. Porém, sob certas condições a influência dos termos não lineares podem ser controlados, obtendo uma imagem do comportamento por um tempo suficientemente grande daquelas trajetórias que ficam próximas da trajetória original [62].

## 2.3 Sistemas conservativos

Uma classe importante de sistemas físicos de interesse são aqueles que preservam o volume do espaço de fase, ou equivalentemente, sistemas nos quais o seguinte teorema tem validade para todo o espaço de fase.

*Teorema de Liouville.* Seja  $\varphi_t$  um fluxo induzido por  $\dot{x} = f(x)$  e  $V(t)$  o volume da imagem  $\varphi_t(S)$ , de qualquer região  $S$  do espaço de fase. Se  $\nabla \cdot f \equiv 0$ , então  $\varphi_t$  preserva o



volume, isto é,  $V(t) = V(0)$  para todo  $t$ . Pelo teorema da divergência

$$\frac{dV(t)}{dt} = \int_S \nabla \cdot f d^N x, \quad \nabla \cdot f = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i(x^{(1)}, \dots, x^{(N)})}{\partial x^{(i)}}, \quad (2.7)$$

onde  $\int_S$  é a integral sob o volume interior à superfície  $S_t$ . Os sistemas que preservam o volume no espaço de fase são chamados *conservativos* [7]. Se  $\nabla \cdot f < 0$  em alguma região do espaço de fase, significando contração de volume, então tal sistema é chamado *dissipativo*. Os sistemas dissipativos são caracterizados pela presença de *atratores* no espaço de fase, enquanto os conservativos carecem de atratores. Os atratores são subconjuntos limitados para os quais regiões de condições iniciais de volume não zero no espaço de fase tendem assim que o tempo avança. Pode-se falar também de mapas conservativos e dissipativos,  $f_M$ . Similarmente, um mapa  $N$ -dimensional conservativo é aquele que preserva o volume  $N$ -dimensional no espaço de fase para cada iteração. Um mapa,  $f_M : M \rightarrow M$ , preserva o volume se a magnitude do determinante da sua matriz Jacobiana é um, ou seja

$$|\det J(x)| = 1, \quad J(x) = \left[ \frac{\partial f_M}{\partial x} \right], \quad (2.8)$$

por outro lado, se  $|\det J(x)| < 1$  em alguma região, dizemos que o mapa é *dissipativo*, e da mesma maneira que um fluxo, tipicamente terá atratores [7].

## 2.4 Conceitos básicos da mecânica hamiltoniana

Um sistema hamiltoniano é completamente descrito por uma função chamada hamiltoniana  $\mathbf{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  [7, 76]. O estado do sistema é dado por um vetor  $2N$ -dimensional composto por  $N$  posições e  $N$  momentos,  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{p}$  respectivamente. As equações de Hamilton determinam as equações de movimento do espaço de fase  $2N$ -dimensional

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial \mathbf{q}}, \quad \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial \mathbf{p}}. \quad (2.9)$$

Vamos assumir que a hamiltoniana não é explicitamente dependente do tempo,  $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ . Neste caso, as equações de movimento implicam que  $d\mathbf{H}/dt = 0$ , em consequência, o valor da hamiltoniana pode ser identificado como sendo a energia do sistema,  $E = \mathbf{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , que é uma quantidade conservada. Logo, a trajetória com energia  $E$  será restrita em uma superfície de energia  $(2N - 1)$ -dimensional  $E = \mathbf{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ .

O requerimento fundamental dos sistemas hamiltonianos é a sua estrutura simpléctica. Mais detalhes sobre o formalismo desta estrutura pode ser obtido nas referências [79, 80]. A estrutura simpléctica implica não somente na conservação de volume,  $V(t)$ , dado pelo teorema de Liouville [7].

**Medidas invariantes.** Formalmente, o fato de um sistema hamiltoniano preservar o volume no espaço de fase durante a evolução temporal, significa que o sistema preserva

a medida de Lebesgue, ou que a medida de Lebesgue é invariante no espaço de fase  $M$ . Intuitivamente, uma medida é uma função  $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^+$  que relaciona um número real maior ou igual que zero, a um conjunto do espaço de fase,  $\mathcal{B} \subseteq M$ . Com as seguintes propriedades: (1) o conjunto vazio tem medida zero,  $\mu(\emptyset) = 0$ ; (2) a medida de um conjunto composto por conjuntos disjuntos, isto é,  $\mathcal{B} = \bigcup_i A_i$  com  $A_i \cap A_j = \emptyset$ ,  $\forall i \neq j$ , é igual à soma de cada uma das medidas dos conjuntos disjuntos,  $\mu(\bigcup_i A_i) = \sum_i \mu(A_i)$ . A medida  $\mu$  é chamada de invariante se  $\mu(S) = \mu(f^{-1}(S))$  para todo conjunto  $S \subseteq M$  [81].

**Transformações de variáveis canônicas.** Seja  $\mathbf{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  com equações de movimento (2.9). Uma transformação de variáveis,  $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{g}_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  e  $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{g}_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ , é chamada de *transformação canônica* se as novas equações de evolução para  $\tilde{\mathbf{q}}$  e  $\tilde{\mathbf{p}}$  tem a forma

$$\frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{dt} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{H}}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}}, \quad \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dt} = -\frac{\partial \tilde{\mathbf{H}}}{\partial \tilde{\mathbf{p}}}, \quad (2.10)$$

onde  $\tilde{\mathbf{H}}$  é a nova hamiltoniana transformada. Uma maneira de especificar uma transformação de variáveis é através de *funções geradoras*,  $\mathbf{S}(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{p}}, t)$ . Uma possibilidade é  $\mathbf{S}(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{p}}, t)$  como sendo uma função das posições antigas  $\mathbf{q}$  e das novas coordenadas de momento  $\tilde{\mathbf{p}}$ . Em função de  $\mathbf{S}$ , a transformação de variáveis e a hamiltoniana são especificadas como

$$\tilde{\mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \tilde{\mathbf{p}}}, \quad \mathbf{p} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{q}}; \quad \tilde{\mathbf{H}}(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t}. \quad (2.11)$$

Também pode-se definir funções geradoras em função de outro par misturado de variáveis:  $\mathbf{S}_1 = (\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}})$ ,  $\mathbf{S}_2 = (\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{q}})$  e  $\mathbf{S}_3 = (\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{p}})$ .

**Constantes de movimento.** Seja um sistema com hamiltoniano  $\mathbf{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , podemos definir o *parêntese de Poisson* de uma função  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  com  $\mathbf{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \equiv \mathbf{H}$  como

$$[\mathbf{f}, \mathbf{H}] = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}}. \quad (2.12)$$

Se diz que uma função  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  é uma *constante de movimento* se é conservada em toda a evolução do tempo, isto é,  $\mathbf{f}(\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0)) = \mathbf{f}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$  ou equivalentemente, se o seu parêntese de Poisson com  $\mathbf{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  é zero.

**Sistemas integráveis:** Dizemos que um sistema hamiltoniano  $N$  dimensional e independente do tempo é *integrável* se tem  $N$  *constantes de movimento globais independentes*,  $\mathbf{f}_i(\mathbf{q}, \mathbf{p})_{i=1, \dots, N}$ . As constantes de movimento  $\{\mathbf{f}_i\}$  são independentes se nenhuma delas pode ser expressa como uma função das outras  $(N-1)$  constantes. Além disso, se  $[\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j] = 0$ , se diz que estão em involução. Se o sistema tem  $N$  constantes de movimento independentes, isto implica que as trajetórias do sistema no espaço de fase ficam restritas a uma superfície  $N$  dimensional,  $\mathbf{f}_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = k_i$ . Enquanto a condição de que as  $N$  constantes de movimento estão em involução restringe a topologia das superfícies a toros  $N$ -dimensional.

Para um sistema integrável  $\mathbf{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  é possível introduzir uma transformação de variáveis  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}})$  tal que o hamiltoniano novo  $\tilde{\mathbf{H}}$  depende apenas da variável  $\tilde{\mathbf{p}}$ .

Uma possibilidade é  $\tilde{\mathbf{p}}_i = \mathbf{f}_i$ , portanto  $d\tilde{\mathbf{p}}/dt = \partial\tilde{\mathbf{H}}/\partial\tilde{\mathbf{q}} = 0$ , logo  $\tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{H}}(\tilde{\mathbf{p}})$ . De fato, se escolhermos  $N$  funções independentes entre si, mas que dependam das  $\mathbf{f}_i$  constantes de movimento, o resultado é o mesmo. Porém, há uma escolha de variáveis especialmente conveniente, chamadas *variáveis ângulo-ação*,  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (\theta, \mathbf{I})$ , onde  $\mathbf{I}$  é definido como

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\iota_i} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.13)$$

onde  $\iota_i$  denota os  $N$  caminhos irredutíveis sobre os  $N$ -toros. A posição  $\theta$ , canonicamente conjugada de  $\mathbf{I}$ , é como um ângulo, pois sob um ciclo seguido por um dos caminhos irredutíveis  $\iota_i$  ao redor do toro, a variável  $\theta_i$  aumenta em  $2\pi$ , enquanto as outras variáveis  $\theta_{j,j} \neq i$  retornam ao seu valor inicial. Escrevendo a transformação de variáveis  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\theta, \mathbf{I})$  em termos da função geradora (2.11)

$$\theta = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{I}}, \quad \mathbf{p} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{q}}. \quad (2.14)$$

As equações de movimento da nova hamiltoniana nas variáveis ângulo-ação são

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{H}}}{\partial \mathbf{I}} \equiv \boldsymbol{\omega}(\mathbf{I}). \quad (2.15)$$

A solução das equações é  $\theta(t) = \theta(0) + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{I})t$ , portanto,  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{I})$  pode ser interpretado como um vetor de velocidade angular descrevendo trajetórias sobre os  $N$ -toros. Trajetórias sobre um  $N$ -toro são quase-periódicas de  $N$  frequências se não existe um vetor de inteiros  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_N)$  tal que  $\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ ,  $\mathbf{m} \neq 0$ . A condição anterior é satisfeita para um conjunto *contável* de  $\mathbf{I}$ . Por outro lado, se  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{m}\omega_0$ , com  $\mathbf{m}$  sendo algum vetor de inteiros e  $\omega_0$  um escalar, então o movimento é periódico e as trajetórias no toro são fechadas. Finalmente, substituindo (2.14) em (2.11)

$$\mathbf{H} \left( \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{I}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}, \mathbf{q} \right) = \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{I}) = E, \quad (2.16)$$

obtemos a *equação de Hamilton-Jacobi* para um sistema com hamiltoniana independente do tempo. O formalismo de Hamilton-Jacobi é uma ferramenta útil para obter séries aproximadas das soluções de sistemas que são *quase-integráveis*.

## 2.5 Transição ao caos conservativo

**Perturbação de sistemas integráveis** [7, 62]. Kolmogorov, Arnold e Moser (KAM) desenvolveram a análise sobre o que acontece com uma hamiltoniana integrável qualquer  $\mathbf{H}_0 = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , se é alterado através de uma pequena perturbação não linear

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{H}_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \epsilon \mathbf{H}_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad (2.17)$$

onde  $\epsilon$  é o parâmetro de perturbação e  $\mathbf{H}_1(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  é a forma da perturbação. Os resultados dessa análise são descritos no conhecido teorema KAM, que é apresentado a seguir sem

grandes detalhes. Expressamos a hamiltoniana (2.17) nas variáveis de ângulo-ação  $(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I})$  da hamiltoniana não perturbado, isto é

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}) = \mathbf{H}_0(\mathbf{I}) + \epsilon \mathbf{H}_1(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}) \quad (2.18)$$

Estamos interessados em descobrir se a hamiltoniana perturbado tem toros  $N$ -dimensionais onde as suas trajetórias estão restritas. Se existem toros, então existem novas variáveis ângulo-ação  $(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\mathbf{I}})$  tal que  $\mathbf{H}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\mathbf{I}}) = \tilde{\mathbf{H}}(\tilde{\mathbf{I}})$ , onde a equação de Hamilton-Jacobi para  $\mathbf{S}$  é

$$\mathbf{H} \left( \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta} \right) = \tilde{\mathbf{H}}(\tilde{\mathbf{I}}). \quad (2.19)$$

Vamos aproximar  $\mathbf{S}$  como uma série de potência em  $\epsilon$ , isto é,  $\mathbf{S} = \tilde{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\theta} + \epsilon \mathbf{S}_1 + \epsilon^2 \mathbf{S}_2 + \dots$ . Substituindo a série em (2.19)

$$\mathbf{H}_0 \left( \tilde{\mathbf{I}} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{S}_1}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \epsilon^2 \frac{\partial \mathbf{S}_2}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \dots \right) + \epsilon \mathbf{H}_1 \left( \tilde{\mathbf{I}} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{S}_1}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \epsilon^2 \frac{\partial \mathbf{S}_2}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \dots, \boldsymbol{\theta} \right) = \tilde{\mathbf{H}}(\tilde{\mathbf{I}}) \quad (2.20)$$

e ficando só com os termos lineares em  $\epsilon$  obtemos

$$\mathbf{H}_0(\tilde{\mathbf{I}}) + \epsilon \left[ \frac{\partial \mathbf{H}_0}{\partial \tilde{\mathbf{I}}} \frac{\partial \mathbf{S}_1}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \mathbf{H}_1(\tilde{\mathbf{I}}, \boldsymbol{\theta}) \right] = \tilde{\mathbf{H}}(\tilde{\mathbf{I}}). \quad (2.21)$$

Expressando  $\mathbf{H}_1(\tilde{\mathbf{I}}, \boldsymbol{\theta})$  e  $\mathbf{S}_1(\tilde{\mathbf{I}}, \boldsymbol{\theta})$  em série de Fourier em  $\boldsymbol{\theta}$

$$\mathbf{H}_1 = \sum_m H_{1,m}(\tilde{\mathbf{I}}) e^{i\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\theta}}, \quad \mathbf{S}_1 = \sum_m S_{1,m}(\tilde{\mathbf{I}}) e^{i\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\theta}} \quad (2.22)$$

onde  $\mathbf{m}$  é um vetor de  $N$  componentes inteiras. Substituindo as séries (2.22) em (2.21) e comparando o resultado com (2.18) nos leva a

$$S_i = i \sum_m \frac{H_{1m}(\tilde{\mathbf{I}})}{\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}_0(\tilde{\mathbf{I}})} e^{i\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}}, \quad \boldsymbol{\omega}_0(\tilde{\mathbf{I}}) \equiv \frac{\partial \mathbf{H}_0(\mathbf{I})}{\partial \tilde{\mathbf{I}}}. \quad (2.23)$$

A questão da convergência desta série é precisamente o problema dos pequenos denominadores. Em particular, a série (2.23) não é aplicável para valores de  $\mathbf{I}$  onde  $\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}_0(\tilde{\mathbf{I}}) = 0$ , para algum valor de  $\mathbf{m}$ . Estes  $\mathbf{I}$  definem os *toros ressonantes* do sistema não perturbado, porém, também há um conjunto grande de *toros não muito ressonantes*. Além disso, existem toros para os quais  $\boldsymbol{\omega}$  satisfaz a condição

$$|\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}| > K(\boldsymbol{\omega}) |\mathbf{m}|^{-(N+1)}, \quad |\mathbf{m}| = |m_1| + \dots + |m_N|, \quad K > 0 \quad (2.24)$$

para todo vetor inteiro  $\mathbf{m}$ . O conjunto de vetores  $\boldsymbol{\omega}$  que não satisfazem a condição (2.24) tem medida de Lebesgue zero em  $\boldsymbol{\omega}$ -espaço. Para  $\boldsymbol{\omega}$  satisfazendo (2.24), a série (2.23) e outros termos similares convergem. O problema de divergência, em teoria, pode ser resolvido para o sistema de interesse.

O teorema de KAM essencialmente afirma que sob condições muito gerais e para  $\epsilon$  pequeno, a “maioria” (no sentido da medida de Lebesgue do espaço de fase) dos toros

do sistema hamiltoniano não perturbado sobrevivem. Dizemos que os toros do sistema não perturbado com vetor de frequências  $\omega_0$  sobrevivem à perturbação, se existir um toro do sistema perturbado ( $\epsilon \neq 0$ ) com vetor de frequências  $\omega_\epsilon = k(\epsilon)\omega_0$ , onde  $k(\epsilon)$  vai continuamente para 1 quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , e tal que a superfície toroidal perturbada com frequência  $\omega_\epsilon$  vai continuamente para o toro não perturbado quando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Portanto, de acordo com o teorema de KAM, para  $\epsilon$  pequeno, o volume no espaço de fase do sistema perturbado não ocupado pelos toros que sobrevivem, é pequeno e vai se aproximando para zero quando  $\epsilon$  aproxima-se para zero.

Como os toros ressonantes satisfazendo  $\mathbf{m} \cdot \omega_0 = 0$  são densos, esperamos que arbitrariamente perto de toros sobreviventes do sistema perturbado, existam regiões do espaço de fase onde as trajetórias não estão em toros que sobreviveram. De fato, estas regiões são ocupadas por trajetórias caóticas, bem como novos toros e trajetórias periódicas elípticas e hiperbólicas, todas criadas pela perturbação. O conjunto no espaço de fase ocupado por toros perturbados que sobreviveram é um fractal. A perturbação de toros ressonantes resultam em um número igual de pontos fixos elípticos e pontos fixos hiperbólicos no sistema perturbado. Este resultado é conhecido como *teorema de Poincaré-Birkhoff* [7, 62], na Fig. 2 isto é esquematizado para dois toros.

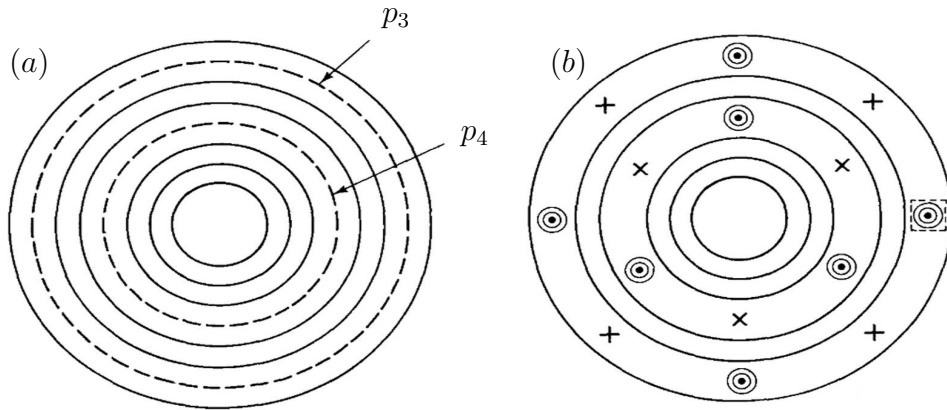


Figura 2 – Esquema do teorema de Poincaré-Birkhoff. (a) sistema integrável e (b) sistema perturbado. O toro mostrado no sistema não perturbado,  $q_3$  ( $q_4$ ), resulta em três (quatro) pontos fixos elípticos e três (quatro) pontos fixos hiperbólicos. *Extraída da referência [7].*

Pontos próximos a pontos fixos elípticos giram em torno deles. Se examinarmos uma pequena região ao redor de um dos pontos elípticos de uma trajetória periódica, vamos ver que é quantitativamente similar a si mesma. Logo, ao redor de um ponto elíptico há curvas KAM circundantes entre as quais há curvas ressonantes KAM que foram substituídas por trajetórias periódicas elípticas e hiperbólicas. Isto é repetido *ao infinito*, pois, qualquer ponto elíptico tem ao redor pontos elípticos de ressonâncias destruídas, e estes por sua vez, também possuem pontos elípticos de ressonâncias destruídas e assim por diante, ver Fig. 3.



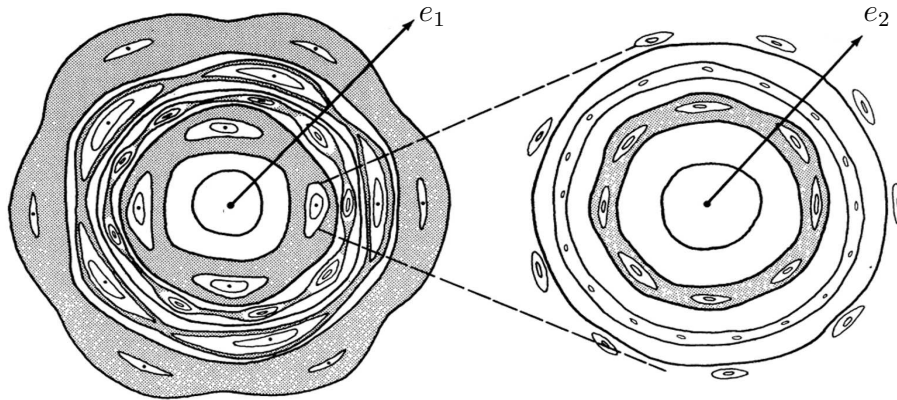


Figura 3 – Dinâmica autossemelhante próximo dos pontos elípticos. Ao redor de um ponto elíptico,  $e_1$ , há curvas KAM circundantes entre as quais há curvas ressonantes KAM que foram substituídas por trajetórias periódicas elípticas e hiperbólicas, e assim por diante  $e_2$ . *Extraída da referência [78].*

Por outro lado, variedades estáveis e instáveis são emanadas dos pontos hiperbólicos, que tipicamente, resultam em interseções heteroclínicas (de fato, interseções infinitas), ver Fig. 4. Isso implica a presença de dinâmicas tipo ferradura e consequentemente caos. Portanto, não só temos regiões ressonantes destruídas contendo trajetórias elípticas e hiperbólicas, como também essas regiões de ressonâncias destruídas tem suas trajetórias caóticas embutidas. Além disso, isto é repetido em qualquer escala, enquanto ampliarmos sucessivamente ao redor dos pontos elípticos.

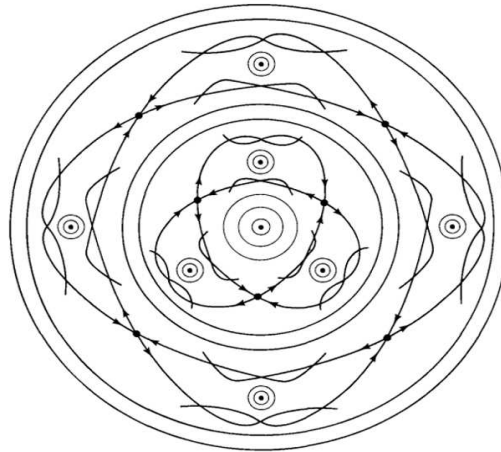


Figura 4 – Variedades estáveis e instáveis são emanadas dos pontos hiperbólicos, que tipicamente, resultam em interseções heteroclínicas. *Extraída da referência [7].*

Uma das consequências da conservação de volumes no espaço de fase para sistemas hamiltonianos é o *teorema de recorrência de Poincaré*. Considerarmos uma hamiltoniana independente do tempo  $\mathbf{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  para o caso onde as trajetórias todas são limitadas, isto ocorre se a superfície de energia é limitada, isto é, não existem soluções de  $E = \mathbf{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  com  $|p| \rightarrow \infty$  ou  $|q| \rightarrow \infty$  [7, 62].

---

### 3. Decomposição de Oseledec.

#### Noção de hiperbolicidade

---

No estudo de sistemas caóticos, a ferramenta utilizada por excelência são os bem conhecidos expoentes de Lyapunov. De forma intuitiva, os expoentes de Lyapunov caracterizam a taxa assintótica de expansão (contração) exponencial média, da distância entre trajetórias iniciadas infinitesimalmente próximas uma da outra. [51, 52, 57]. Porém, o formalismo dos expoentes de Lyapunov é dado através do teorema de Oseledec. O teorema de Oseledec fornece as condições necessárias para a existência da decomposição do fibrado tangente denominada *decomposição de Oseledec*. Essa decomposição fornece requisitos suficientes para encontrar subespaços no fibrado tangente associados aos expoentes de Lyapunov, esses subespaços são chamados de *subespaços de Oseledec*. Tais subespaços são invariantes com a evolução temporal e independentes da norma, em consequência, fornecerão informação direta das direções de expansão e contração do sistema [53–57].

Por outro lado, uma questão interessante é a noção de hiperbolicidade em sistemas dinâmicos. O conceito de hiperbolicidade está sempre relacionado à ideia de contração e expansão exponencial de distâncias, porém, pode ter diferentes sentidos em diferentes contextos. Em particular, um conjunto invariante sobre a dinâmica é hiperbólico se, o espaço tangente de quase todo ponto do conjunto pode ser dividido em dois subespaços que são contraídos, respectivamente, sobre a dinâmica para frente e para trás. Além disso, a hiperbolicidade está estreitamente relacionada com a estabilidade do sistema, ou de trajetórias individuais. Implicando na existência de conjuntos estruturalmente estáveis que são insensíveis às variações de parâmetros. Além disso, dinâmicas complexas, em particular caóticas, podem ser tratadas através da noção de hiperbolicidade [7, 58, 59]. Dado que a propriedade de hiperbolicidade não é típica, o conceito da hiperbolicidade tem sido ampliado para descrever uma maior variedade de sistemas, tais como, sistemas parcialmente hiperbólicos ou não-uniformemente hiperbólicos [57, 60–63].

Neste sentido, a decomposição de Oseledec nos fornece uma teoria linear no estudo da hiperbolicidade (parcial ou não-uniforme) [57, 82]. As distribuições de probabilidade dos ângulos locais entre os diferentes subespaços de Oseledec têm sido usadas para definir quantificadores do grau de hiperbolicidade [57, 64].

Neste capítulo apresentamos, sem demonstração, o teorema de Oseledec aplicável para sistemas hamiltonianos. Para o leitor interessado em mais detalhes das demonstrações deste teorema referimos às referências [11, 53, 57]. No final deste capítulo, introduzimos

também os FTLEs e os ângulos entre os diferentes subespaços de Oseledec na decomposição de Oseledec. Para uma trajetória dada, esses objetos dependerão da condição inicial no espaço de fase, uma apropriada direção no espaço tangente associado e o tempo de evolução, nos permitindo identificar propriedades dinâmicas que dependerão do tempo, a região no espaço de fase e a geometria do fibrado tangente. Também daremos uma breve noção de hiperbolicidade no contexto de mapas lineares, pontos periódicos e subconjuntos invariantes de trajetórias não periódicas.

### 3.1 Teorema de Oseledec $N$ -dimensional

Seja  $f : M \rightarrow M$  um  $C^1$  difeomorfismo, preservando uma medida  $\mu$ .  $M$  é uma variedade riemanniana<sup>1</sup> com  $\dim M = N$  e  $M$  é  $f$ -invariante de probabilidade total, isto é,  $\mu(M) = 1$  para a medida invariante  $\mu$ . Para quase todo  $x \in M$ :

Existem números reais  $\lambda_x^{(1)} > \dots > \lambda_x^{(m)}$ , onde  $(m \leq N) \in \mathbb{Z}^+$  e  $m$  números inteiros  $d_1, \dots, d_m \in \mathbb{Z}^+$  tal que  $d_1 + \dots + d_m = N$ . Existe uma decomposição do fibrado tangente chamada *decomposição de Oseledec*

$$T_x M = E_x^{(1)} \oplus \dots \oplus E_x^{(m)}, \quad \text{com} \quad \dim(E_x^{(i)}) = d_i, \quad \text{tal que} \quad (3.1)$$

- Os subespaços  $E_x^{(i)}$ , chamados *subespaços de Oseledec*, são invariantes sob a evolução  $D_x f$  no fibrado tangente, isto é,

$$D_x f(E_x^{(i)}) = E_{f(x)}^{(i)}. \quad (3.2)$$

- Para  $v \in E_x^{(i)} / E_x^{(i-1)}$ , ou seja,  $v \in (E_x^{(1)} \oplus \dots \oplus E_x^{(i)})$ , mas  $v \notin (E_x^{(1)} \oplus \dots \oplus E_x^{(i-1)})$ , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|D_x f^n(v)\| = \lambda_x^{(i)}. \quad (3.3)$$

- Os subespaços de Oseledec são transversais, isto é

$$\angle(E_x^{(i)}, E_x^{(j)}) > 0, \quad \forall i \neq j \quad (3.4)$$

onde  $\angle(E_x^{(i)}, E_x^{(j)})$  é o ângulo ente os subespaços  $E_x^{(i)}$  e  $E_x^{(j)}$ . Os números  $\lambda_x^{(1)}, \dots, \lambda_x^{(m)}$  são os chamados *Expoentes de Lyapunov* [83]. Esse teorema é generalizado para lidar com qualquer medida invariável  $\mu$ , sem a necessidade de assumir ergodicidade<sup>2</sup>. Assim, os expoentes de Lyapunov são funções mensuráveis  $\lambda^{(1)}(x), \dots, \lambda^{(m)}(x)$ , dependendo apenas de  $\mu$  [11]. Como  $M$  é uma  $C^1$  variedade Riemanniana há um produto interno sob cada espaço tangente  $T_x M$ , em  $x \in M$ . A norma  $\|D_x f^n\|$  do mapa linear  $D_x f^n : T_x M \rightarrow T_{f^n(x)} M$  vai

<sup>1</sup> Abusando da linguagem, uma variedade riemanniana é a generalização da existência de  $T_x M$  munida com uma métrica para todo  $x \in M$ .

<sup>2</sup> Seja  $f : M \rightarrow M$ , uma medida invariante  $\mu$  é ergódica se sempre que  $f^{-1}(\Lambda) = \Lambda$ , para algum  $\Lambda \in M$ , então  $\mu(\Lambda) = 1$  ou  $\mu(\Lambda) = 0$ .

dependem das normas sobre  $T_x M$  e  $T_{f^n(x)}$  definidas a partir do produto interno desses espaços. Se é escolhida uma métrica Riemanniana equivalente para  $M$  nós teríamos exatamente o limite  $\lambda$ . Nós escolhemos o produto interno usual em  $\mathbb{R}^n$ . A partir deste teorema, temos algumas das seguintes implicações.

(1) Os expoentes de Lyapunov assintóticos são constantes ao longo da trajetória gerada pela evolução  $f$ , o que implica que, para um sistema ergódico, eles são constantes para quase todo  $x \in M$ . (2) Se o sistema dinâmico é invertível e a medida  $\mu$  é preservada, então a soma dos expoentes de Lyapunov é zero. (3) Para um sistema hamiltoniano conservativo, e mais geral, para qualquer difeomorfismo simplético, o espectro dos expoentes de Lyapunov é simétrico, isto é,  $\lambda_x^{(l)} = -\lambda_x^{(N-l+1)}$ , onde para cada um dos expoentes individuais  $\lambda_x^{(N/2-j)} = 0$ ,  $j = 0, \dots, n_c - 1$ , se há  $n_c$  constantes de movimento (uma das quais precisamente é a energia). (4) Para qualquer sistema dinâmico a tempo contínuo, pelo menos um dos expoentes de Lyapunov é zero. (5) A decomposição de Oseledec em tais subespaços invariantes existe para qualquer mapa, que é contínuo e mensurável (inversa também contínua e mensurável), cujas matrizes Jacobianas existem e seus elementos são finitos. Além disso, se a matriz Jacobiana é não degenerada,  $m = N$ , pode-se mostrar que o espectro dos expoentes de Lyapunov também é não degenerado e todos os subespaços  $E_x^{(i)}$  tem dimensão 1. Por outro lado, se a matriz Jacobiana é degenerada, cada subespaço covariante tem uma dimensão igual à degenerescência  $n_i$  dos correspondentes expoentes de Lyapunov.

Á sequência ordenada dos  $N$  expoentes de Lyapunov  $\lambda_x^{(i)}$ , cada um repetido segundo sua multiplicidade  $d_i$  é chamado o espectro de Lyapunov assintótico,  $\text{Sp}(x)$ , isto é,  $\text{Sp}(x) = \lambda_x^{(1)} \geq \lambda_x^{(2)} \geq \dots \geq \lambda_x^{(N)}$ . É importante esta sequência ordenada, isto é, o maior expoente de Lyapunov  $\lambda_x^{(1)}$  é associado ao primeiro subespaço de Oseledec,  $E_x^{(1)}$ ; o segundo maior expoente de Lyapunov  $\lambda_x^{(2)}$  é associado ao segundo subespaço de Oseledec,  $E_x^{(2)}$ , e assim por diante.

**Refinação do teorema de Oseledec.** Para sistemas mais complexos, existe uma maneira de refinar o teorema de Oseledec: O teorema de Oseledec dá limites sobre um conjunto completo de medida  $M$  associada à medida invariante  $\mu$ . É possível reformular o teorema de Oseledec dizendo que a decomposição e o limite associado seja válido para um subconjunto,  $\Lambda \subset M$  de probabilidade total que é independente da medida invariante a escolher,  $\mu$ . Um conjunto de probabilidade total  $\Lambda \subseteq M$  tem a propriedade que  $\mu(\Lambda) = 1$  para a medida invariante  $\mu$  [11, 97].

De forma equivalente e intuitiva, os expoentes de Lyapunov dão uma caracterização da expansão (contração) média para tempos assintóticos de vetores evoluídos no espaço tangente. Define-se a taxa de expansão (contração) do vetor  $u \in T_x M$  durante uma evolução de longitude  $t$  como  $\gamma(u, x, t) = \|D_x f^t u\| / \|u\|$ . Assim, o expoente de Lyapunov associado ao vetor  $v \in T_x M$  é definido como  $\lambda(u, \varphi(x)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \gamma(u, x, t)$ , sempre

que o limite existir. Esta quantidade nos diz essencialmente como uma perturbação infinitesimal  $\delta x$  da condição inicial  $x \in M$  ao longo do vetor  $u \in T_x M$  é exponencialmente expandida (ou contraída) para tempos longos  $\|\delta x_t\| \approx \|\delta x\| e^{\lambda(u,x)t}$ . Variando o vetor  $v$  em  $T_x M$ , a quantidade  $\lambda(v,x)$  pode ter um número finito,  $m \leq N$ , de valores diferentes,  $\lambda_x^{(1)} < \lambda_x^{(2)} < \dots < \lambda_x^{(n)}$ . Daqui para frente identificaremos  $M$  com  $\mathbb{R}^N$ , porém, vamos continuar denotando-lo como  $M$  [84].

Para terminar esta seção, daremos um dos teoremas da teoria ergódica com maior aplicação, o Teorema ergódico. Seja  $f : \Lambda \rightarrow \Lambda$  uma transformação que preserva medida e suponha que  $\varphi$  é uma função  $\mu$ -integrável. Então definem-se as seguintes médias:

**Média do espaço.** Se  $\mu(S)$  for finita e diferente de zero, pode ser considerada a média do espaço ou a média da fase da função  $\varphi$  sobre o conjunto  $S \subseteq \Lambda$  como

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{\mu(S)} \int_S \varphi \, d\mu, \quad (3.5)$$

para um espaço de probabilidade total,  $\mu(\Lambda) = 1$ .

**Média do tempo.** Esta é definida como a média sobre iterações de  $f$  começando em algum ponto  $x \in \Lambda$ , isto é

$$\hat{\varphi}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{t-1} \varphi(f^n(x)). \quad (3.6)$$

O teorema ergódico pode ser útil para aplicações que são ergódicas em  $\Lambda$ .

*Teorema ergódico.* Se a transformação for ergódica e a medida for invariante, então, a média do tempo é igual à média do espaço em quase todo lugar (exceto para pontos com medida zero). Então

$$\frac{1}{\mu(\Lambda)} \int f \, d\mu = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{t-1} f(f^n(x)). \quad (3.7)$$

Portanto, se o teorema ergódico tem validade em  $\Lambda$ , podemos calcular as medidas de hiperbolicidade usando a média temporal definida pela equação (3.6) [54, 56, 81].

## 3.2 FTLEs e ângulos entre subespaços de Oseledec

Os expoentes de Lyapunov fornecem informação assintótica das direções de expansão e contração do sistema, o que nos permite distinguir trajetórias, por exemplo, entre trajetórias regulares e caóticas. No entanto, estamos interessados em propriedades locais do sistema, o objetivo central de nosso trabalho é a análise de quantidades associadas a trajetórias de longitude temporal finita, assim como da região no espaço de fase. Para tal objetivo, aproveitaremos a propriedade de invariância temporal dos subespaços de Oseledec,  $D_x f(E_x^{(i)}) = E_{f(x)}^{(i)}$ , para definir os FTLEs [84].

*Definição.* Seja  $x \in M$  tal que  $T_x M$  permite uma decomposição de Oseledec,  $T_x M = E_x^{(1)} \oplus \cdots \oplus E_x^{(m)}$ . Seja  $v_x^{(i)} \in E_x^{(i)}$  um vetor unitário no subespaço  $E_x^{(i)}$ , então a quantidade

$$\lambda_{\tau,x}^{(i)} = \frac{1}{\tau} \log \|D_x f^\tau v_x^{(i)}\|, \quad \|v_x^{(i)}\| = 1 \quad (3.8)$$

define o expoente de Lyapunov a tempo finito de  $x \in M$  restrita a trajetória  $\{f^\tau(x) : \tau > 0\}$  e associado ao subespaço de Oseledec  $E_x^{(i)}$ . Para cada subespaço de Oseledec existe um FTLEs associado. O limite para  $\tau \rightarrow \infty$  coincide obviamente com o espectro de Lyapunov [84, 85].

**Ângulos entre subespaços de Oseledec.** Os ângulos entre os diferentes subespaços de Oseledec  $E_x^{(i)}$  no ponto  $x$  podem ser usados para caracterizar as propriedades dinâmicas de um sistema caótico. Eles têm sido usados como um método direto para avaliar se um sistema caótico é hiperbólico [65, 66, 86]. Além disso, os desvios da hiperbolicidade podem ser estudados observando o comportamento das distribuições dos ângulos quando os parâmetros são alterados ou mesmo quando comparados com as distribuições dos ângulos de outros sistemas [85, 87–89].

Sejam  $E_x^{(i)}$  e  $E_x^{(j)} \subset T_x M$  dois subespaços na decomposição de Oseledec com  $\dim(E_x^{(j)}) = 1$ . Vamos supor que encontramos os vetores  $v_x^{(i)}$  e  $v_x^{(j)}$  que geram esses subespaços, respectivamente, então

$$\langle v_x^{(i)} | v_x^{(j)} \rangle = \cos(\theta_{1,x}^{(i,j)}), \quad \|v_x^{(i)}\| = 1 = \|v_x^{(j)}\|, \quad (3.9)$$

onde  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  é o produto interno induzido em  $T_x M$  e  $\theta_{1,x}^{(i,j)}$  é o ângulo entre os subespaços de Oseledec. Porém, o ângulo não é univocamente definido, para resolver isso, nós escolhemos o menor ângulo, assim

$$\theta_{1,x}^{(i,j)} = \min \left\{ \arccos \left( \langle \pm v_x^{(i)} | \pm v_x^{(j)} \rangle \right) \right\}. \quad (3.10)$$

Os vetores gerando subespaços de Oseledec correspondentes a expoentes de Lyapunov não degenerados não podem ser completamente paralelos ao longo de uma determinada trajetória. No entanto, uma trajetória pode passar arbitrariamente perto de tais tangências, resultando em ângulos muito pequenos. Portanto, a informação física relevante deve ser codificada de forma que as distribuições de probabilidade dos ângulos se aproximem do ângulo zero.

Por outra parte, a definição de ângulo para subespaços de dimensão arbitrária não é única, e em consequência, ângulos entre subespaços de Oseledec degenerados não são únicos. Nesta tese precisamos calcular o ângulo entre um espaço de dimensão finita e um subespaço de dimensão um, para isso, usaremos a seguinte definição. Seja  $U = \text{span}\{u\}$  um subespaço 1-dimensional e  $V = \text{span}\{v_1, \dots, v_q\}$  um subespaço  $q$ -dimensional de  $X$ , o ângulo entre  $U$  e  $V$  é definido por

$$\cos^2(\theta) = \frac{\langle u, u_V \rangle^2}{\|u\|^2 \|u_V\|^2}, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad (3.11)$$



onde  $u_V$  denota a projeção ortogonal de  $u$  sobre  $V$  e  $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$  denota a norma induzida sobre  $X$ . Porém, a equação (3.11) pode ser reduzida se considerarmos uma base ortonormal que gera  $V$ , além disso, nós estamos interessados no caso onde  $U = \{\mathbf{w}\}$  e  $V = \{\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}\}$ , levando à equação

$$\cos^2 \theta = \langle \mathbf{w} | \mathbf{v}^{(1)} \rangle^2 + \langle \mathbf{w} | \mathbf{v}^{(2)} \rangle^2. \quad (3.12)$$

**Ângulo Médio.** Também podemos definir o *valor médio dos ângulos locais*, calculado sobre uma trajetória de comprimento de tempo finito  $\tau$  ( $\tau$  é uma janela de tempo), que é representado por  $\theta_{\tau,x}^{ij}$ . Seja  $v_x^{(i)}$  e  $v_x^{(j)}$  os vetores associados aos subespaços invariantes  $E_x^{(i)}$  e  $E_x^{(j)}$  respetivamente. Se discretizarmos a trajetória em  $m$  seções de comprimento  $\Delta t$ , tal que,  $m\Delta t = \tau$ , então o valor médio dos ângulos locais pode ser definido por

$$\theta_{\tau,x}^{ij} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \theta_x^{ij}(t) = \frac{1}{m\Delta t} \sum_{l=1}^m \theta_x^{ij}, \quad (3.13)$$

onde  $\theta_x^{ij}$  é o ângulo local dado por Eq. (3.9) ao longo da trajetória considerada. Esta quantidade nos permite obter informações sobre as posições relativas mais recorrentes entre as variedades estáveis/instáveis em uma região específica do espaço de fase visitado pela trajetória durante a janela de tempo  $\tau$ .

### 3.3 Cálculo numérico da decomposição de Oseledec

Os vetores covariantes de Lyapunov (CLVs, *das siglas em inglês*) são definidos como aqueles vetores unitários que geram os subespaços na decomposição de Oseledec, isto é, vetores independentes da norma e invariantes sob inversão temporal associados aos Expoentes de Lyapunov. Portanto, o conhecimento dos CLVs permite investigar diretamente as direções de expansão e contração de um determinado sistema dinâmico, fornecendo informações topológicas sobre a estrutura local do espaço tangente [84, 85].

Embora existam outros algoritmos para calcular os CLVs, por exemplo, através da interseção de subespaços apropriados [90, 91], neste trabalho, usamos o método mais popular esquematizado por Ginelli *et al.* [84, 85]. Nesse esquema, os CLVs são calculados através de uma regra dinâmica estável, com base nas informações obtidas na evolução temporal para frente e para trás. No apêndice A.1 é descrito o esquema numérico de Ginelli para o cômputo dos CLVs.

Se  $\dim E_x^{(i)} = 1$ , isto é, se  $\lambda_x^{(i)}$  é não degenerado, então pode-se definir (salvo um sinal) univocamente o CLV  $v_x^{(i)}$  associado ao expoente de Lyapunov  $\lambda_x^{(i)}$  correspondente. Para expoentes de Lyapunov degenerados, qualquer base não singular formada por  $d_i = \dim E_x^{(i)}$  CLVs pode ser arbitrariamente considerada,  $v_x^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, d_i$ .

Existem muitas aplicações de CLVs para caracterizar a dinâmica de sistemas complexos, para citar alguns [68, 87, 90, 92–96]. De especial interesse é o uso de CLVs para discutir diferentes graus de (não) hiperbolicidade em sistemas dinâmicos [65–70].

Já apresentada a decomposição de Oseledec, assim como as principais observáveis no nosso estudo de sistemas hamiltonianos, nas próximas seções daremos uma noção de hiperbolicidade em diferentes contextos, assim como a sua relação com a decomposição de Oseledec.

### 3.4 Hiperbolicidade em sistemas lineares

Consideramos um sistema dinâmico definido pela iteração da matriz  $A$  de um espaço euclidiano, chamado de mapa linear  $A$ . Se  $A$  é invertível, então o sistema é invertível. Seja  $A : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ , chamamos ao conjunto de todos os autovalores o espectro de  $A$ . O comportamento assintótico das trajetórias em mapas lineares pode ser descrita através da decomposição do mapa em subespaços invariantes.

**Subespaços Invariantes de Mapas Lineares.** Seja  $A : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  qualquer mapa linear. Para um autovalor real  $\lambda$  de  $A$ , é denotado por  $E_\lambda$  o *espaço raiz* correspondente a  $\lambda$ , isto é, ao espaço de todos os vetores  $v \in \mathbb{R}^N$ , tal que,  $(A - \lambda I)^k v = 0$  para algum  $k$ .

Similarmente, para um par de autovalores complexos conjugados,  $\lambda$  e  $\bar{\lambda}$ , seja  $E_{\lambda, \bar{\lambda}}$  a interseção de  $\mathbb{R}^n$  com a soma correspondente a  $E_\lambda$  e  $E_{\bar{\lambda}}$  para a complexificação de  $A$  (extensão ao espaço complexo  $\mathbb{C}^n$ ),  $E_{\lambda, \bar{\lambda}}$  será chamado também de espaço raiz. Seja

$$\begin{aligned} E^{(-)} &= \bigoplus_{|\lambda| < 1} E_\lambda \oplus \bigoplus_{|\lambda| < 1} E_{\lambda, \bar{\lambda}}, & E^{(+)} &= \bigoplus_{|\lambda| > 1} E_\lambda \oplus \bigoplus_{|\lambda| > 1} E_{\lambda, \bar{\lambda}}, \\ E^{(0)} &= E_1 \oplus E_{-1} \oplus \bigoplus_{|\lambda|=1} E_{\lambda, \bar{\lambda}}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde  $\oplus$  é a soma direta de subespaços vetoriais. Se o mapa  $A$  é invertível, então  $E^{(+)}(A) = E^{(-)}(A^{-1})$ . Esses subespaços  $E^{(-)}$ ,  $E^{(+)}$ ,  $E^{(0)}$  são subespaços invariantes sob  $A$  e

$$\mathbb{R}^N = E^{(-)} \oplus E^{(+)} \oplus E^{(0)}. \quad (3.15)$$

O espaço  $E^{(-)}$  é chamado de *subespaço invariável de contração* do mapa, similarmente o espaço  $E^{(+)}$  é o *subespaço invariante de expansão*. Um mapa linear  $A : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  é chamado de *hiperbólico* se  $\mathbb{R}^N = E^{(+)} \oplus E^{(-)}$ . Uma descrição geral do comportamento assintótico de iteradas de um mapa linear hiperbólico são dadas a seguir.

(I) Para  $\forall v \in E^{(-)}$ , as iteradas positivas  $A^n v$  convergem para a origem exponencialmente quando  $n \rightarrow \infty$  e se  $A$  é invertível então as iteradas negativas  $A^n v$  vão até infinito com velocidade exponencial quando  $n \rightarrow -\infty$ . (II) Para  $\forall v \in E^{(+)}$  as iteradas positivas de  $v$  convergem exponencialmente até infinito. Se  $A$  é invertível então as iteradas



negativas convergem exponencialmente à origem. (III) Para  $\forall v \in \mathbb{R}^N / (E^{(-)} \cup E^{(+)})$  as iteradas  $A^n v$  convergem exponencialmente até infinito quando  $n \rightarrow \infty$ , se  $A$  é invertível, também convergem exponencialmente até infinito quando  $n \rightarrow -\infty$  [62].

Para a descrição do comportamento de iterações para mapas lineares não-hiperbólicos, devemos entender o que acontece no subespaço  $E^{(0)}$ . Esse subespaço é decomposto em subespaços raiz  $E_1$ ,  $E_{-1}$ ,  $E_{\lambda, \bar{\lambda}}$ , com  $|\lambda| = 1$ . Em cada um destes subespaços tem um auto-espaço invariante correspondente, denotados como  $\tilde{E}_1$ ,  $\tilde{E}_{-1}$ ,  $\tilde{E}_{\lambda, \bar{\lambda}}$ , respectivamente. Os dois primeiros subespaços produzem um comportamento trivial: todo ponto em  $\tilde{E}_1$  é um ponto fixo, enquanto pontos em  $\tilde{E}_{-1}/\{0\}$  são periódicos com período dois. Para pontos num auto-espaço  $\tilde{E}_{\lambda, \bar{\lambda}}$ , sendo  $\lambda$  não real, então  $A$  tem um plano invariante tal que num apropriado sistema de coordenadas, o mapa age nesse plano como uma rotação ao redor da origem.

Entender o comportamento das trajetórias em sistemas lineares, assim como a sua descrição através dos subespaços invariantes é fundamental para entender o comportamento de trajetórias em sistemas não lineares. No que segue, apresentamos uma breve noção de hiperbolicidade em sistemas não lineares [62].

### 3.5 Hiperbolicidade local em sistemas não lineares

O primeiro cenário natural para o estudo local de sistemas não lineares surge quando a trajetória original é periódica. Seja  $f : M \rightarrow M$  o sistema contínuo  $N$ -dimensional não linear,  $\dot{x} = f(x)$ . Considere-se  $x^* \in M$  a trajetória periódica,  $x^*(t) = x^*(t+T)$ , com  $T$  sendo o período. Desejamos examinar as trajetórias próximas a  $x^*$ . Seja  $x(t) = x^*(t) + \eta(t)$ , assumindo que  $\eta(t)$  é pequeno. Expandindo  $f(x)$  em série de Taylor em primeiro ordem, temos

$$f(x^* + \eta) = f(x^*) + (D_{x^*} f) \cdot \eta + \mathcal{O}(\eta^2), \quad (3.16)$$

Então, considerando somente termos lineares, obtemos a seguinte equação linear para a evolução temporal da perturbação de  $x$

$$\frac{d\eta}{dt} = D_{x^*(t)} f \cdot \eta, \quad (3.17)$$

onde a matriz  $Df_x(t)$  varia periodicamente no tempo. Tendo isto em vista, o problema de estabilidade linear ao redor de trajetórias periódicas é reduzido a um sistema linear  $N$ -dimensional dependente do tempo. Pode-se observar que aplicando a linearização anterior para um ponto fixo, o problema se torna independente do tempo.

De forma equivalente, empregando-se uma seção de Poincaré, podemos reduzir o problema a um mapa  $\hat{x}_{n+1} = \tilde{f}(\hat{x}_n)$ , com  $\dim(\hat{x}) = \dim(x) - 1$ . Assumindo que a trajetória é periódica de período  $p$ ,  $x_p^* = x_0^*$ . Vamos selecionar um dos  $p$  pontos sobre a trajetória

periódica e examinemos a  $p$ -ésima iteração do mapa  $\tilde{f}^p$ ; linearizando ao redor deste ponto, obtemos novamente um sistema linear

$$\hat{y}_{n+1} = \left( D\tilde{f}^p \right) \cdot \hat{y}_n. \quad (3.18)$$

onde o operador linear  $D\tilde{f}^p : T_{x^*}M \rightarrow T_{x^*}M$  é obtido usando a regra da cadeia

$$D\tilde{f}^p(x_j^*) = D_{x_{j-1}^*}\tilde{f} \, D_{x_{j-2}^*}\tilde{f} \cdots D_{x_0^*}\tilde{f} \, D_{x_{p-1}^*}\tilde{f} \cdots D_{x_j^*}\tilde{f}. \quad (3.19)$$

Essa discussão acerca da linearização tem validade para mapas em geral. Portanto, o comportamento infinitesimal de órbitas próximas ao ponto periódico é dado a partir de iterações de um mapa linear,  $D_x\tilde{F}^n$ . Assim, a discussão do comportamento da seção anterior, é válida para o operador linear da eq. 3.19.

Em particular, seja  $x$  um ponto periódico de período  $n$  cuja trajetória está em  $U$ .  $x$  é um *ponto periódico hiperbólico* para  $f$  se  $D_x f^n : T_x M \rightarrow T_x M$ , é um mapa linear hiperbólico. Esta trajetória é chamada trajetória periódica hiperbólica. Para o caso de  $f$  sendo um sistema contínuo, vamos assumir que a trajetória de um ponto  $x \in U$  está em  $U$  e fecha no tempo  $t_0$ . Então existem duas possibilidades,  $f(x) = 0$  ou  $f(x) \neq 0$ . Se  $f(x) = 0$ , o ponto  $x$  é chamado *ponto fixo hiperbólico* do fluxo  $\varphi^t$  gerado por  $f$  se  $D_x \varphi^t : T_x M \rightarrow T_x M$  é um mapa linear hiperbólico para todo  $t \neq 0$ . Se  $f(x) \neq 0$ , o ponto é chamado de *ponto periódico hiperbólico* de período  $t$  para o fluxo  $\varphi^t(x) = x$  e o operador linear  $D_x \varphi^t : T_x M \rightarrow T_x M$  tem só um e nenhum outro valor absoluto igual a um [7, 62, 76].

Não só existe a noção de *hiperbolicidade* para pontos fixos, mas também para conjuntos invariantes mais gerais de mapas no seguinte contexto. Os diferenciais das iterações  $f^k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  ao longo de uma trajetória, é visto como um produto de diferentes mapas lineares. Se a trajetória é periódica, o produto durante um período pode ser reduzido por um simples mapa linear, assim, para tempos longos, o produto é reduzido a iterações sucessivas deste simples mapa. Porém, para trajetórias não periódicas, o produto dos diferenciais não pode ser reduzido por a iteração de um simples mapa. Portanto, já não podemos falar acerca de autovalores, mas sim pode-se definir hiperbolicidade em termos de expansão e contração de vetores tangentes.

Dizemos que um conjunto invariante  $\Lambda$  é *hiperbólico* se para quase todo<sup>3</sup>  $x \in \Lambda$ , o espaço tangente  $T_x M$  pode-se decompor em soma direta de subespaços estáveis e instáveis,  $T_x M = E_x^{(s)} \oplus E_x^{(u)}$ , tal que

(i) A dimensão dos subespaços  $E_x^{(s)}$  e  $E_x^{(u)}$  são localmente constantes e a orientação desses mudam continuamente com  $x \in \Lambda$ . (ii) A divisão de  $E_x^{(s)}$  e  $E_x^{(u)}$  é invariante no sentido que  $D_x f \left( E_x^{(s,u)} \right) = E_{f(x)}^{(s,u)}$ , as trajetórias originadas desde uma condição inicial infinitamente próxima de  $x$  vão se aproximar exponencialmente à trajetória  $\{f^n(x)\}$ , ou

<sup>3</sup> Exceto para conjuntos com medida de Lebesgue igual que zero.

vão divergir exponencialmente desta se o deslocamento infinitesimal é em  $E_x^{(s)}$  ou  $E_x^{(u)}$ , respectivamente. (iii) Os subespaços  $E_x^{(s)}$  e  $E_x^{(u)}$  são transversais, isto é, existe  $\alpha > 0$  tal que para qualquer  $x \in \Lambda$ ,  $u \in E_x^{(s)}$ ,  $v \in E_x^{(u)}$ , o ângulo entre  $u$  e  $v$  é pelo menos  $\alpha$  [97].

Algumas das características é que qualquer  $C^1$ -perturbação suficientemente pequena de um difeomorfismo hiperbólico também é um difeomorfismo hiperbólico, ademais a dinâmica sobre um conjunto invariante pode ser representada via dinâmica simbólica [7].

### 3.6 Variedades estáveis e instáveis

A *variedade estável*,  $W_{x^*}^{(s)}$ , de uma trajetória periódica é o conjunto de pontos  $x \in M$  tais que as trajetórias para frente no tempo, iniciadas em  $x$  vão se aproximando ao estado estacionário ou à curva fechada traçado pela trajetória periódica. A *variedade instável*,  $W_{x^*}^{(u)}$ , de uma trajetória periódica é o conjunto de pontos  $x \in M$  tais que as trajetórias para trás no tempo, iniciadas desde  $x$  vão se aproximando ao estado estacionário ou à curva fechada traçada pela trajetória periódica.

$$\begin{aligned} W_{x^*}^{(u)} &= \{y \in U \mid \|f^{-n}(y) - x^*\| \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow 0\} \\ W_{x^*}^{(s)} &= \{y \in U \mid \|f^n(y) - x^*\| \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow 0\} \end{aligned} \quad (3.20)$$

As variedades globais instável e estável são geralmente imersas no espaço de fase de uma maneira complicada. Na Fig. (6) pode-se ver uma imagem típica das variedades instável e estável. O teorema de Hadamard-Perron [62] demonstra que a dinâmica próxima a pontos periódicos é bem semelhante ao de sua parte linear.

Na figura 5(a) é mostrado um ponto fixo  $\gamma$  com uma variedade estável e uma variedade instável em um sistema 2-dimensional. Enquanto na figura 5(b) o ponto fixo com uma variedade instável 1-dimensional e variedade estável 2-dimensional.

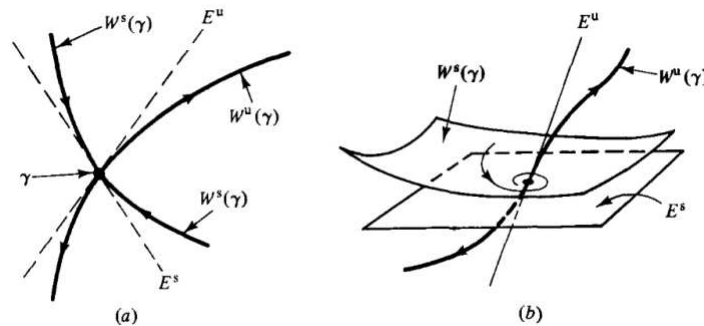


Figura 5 – Variedades estáveis ( $W^s(\gamma)$ ) e instáveis ( $W^u(\gamma)$ ) emanadas de um ponto periodico hiperbólicos, assim como os subspaços estáveis ( $E^s$ ) e instáveis ( $E^u$ ) tangenciais as variedades. (a)  $\dim W^s(\gamma) = \dim E^s = 1$  e  $\dim W^u(\gamma) = \dim E^u = 1$ , (b)  $\dim W^s(\gamma) = \dim E^s = 2$  e  $\dim W^u(\gamma) = \dim E^u = 1$ . Extraída da referência [7].

Para mapas invertíveis, *não há interseções entre variedades instáveis*, similarmente, *não há interseções entre variedades estáveis*. Porém, variedades estáveis e instáveis podem se intersectar. A interseção de uma variedade estável com uma variedade instável de um ponto fixo  $\gamma$  é chamado de *interseção homoclínica*. A interseção das variedades estáveis e instáveis de dois pontos fixos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , é chamado de *interseção heteroclínica* [7].

Na figura 6 são mostradas interseções para um mapa bidimensional. Do lado esquerdo é mostrada a interseção homoclínica (ponto fixo  $\gamma$ ). Do lado direito é mostrada a interseção heteroclínica (pontos fixos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ ).

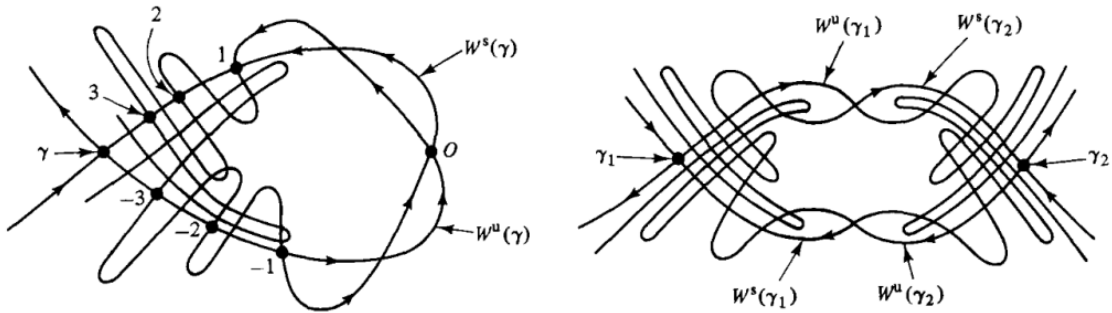


Figura 6 – Interseção homoclínica (esquerda), as variedades instáveis e estáveis do mesmo ponto  $\gamma$  se cruzam. Interseção heteroclínica (direita), as variedades estável e instável de pontos fixos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  se cruzam. *Extraída da referência [7]* .

Se é encontrada uma interseção entre variedades, então estas variedades vão se cruzar um número infinito de vezes. A presença de interseções homoclínicas e heteroclínicas envolvem dinâmicas complicadas [7, 62].

De forma análoga, a variedade estável (instável) global,  $W_x^{(s)}$  ( $W_x^{(u)}$ ), de um conjunto hiperbólico pode ser caracterizada topologicamente como segue:

$$\begin{aligned} W_x^{(s)} &= \{u \in U \mid \|f^n(x) - f^n(y)\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty\}, \\ W_x^{(u)} &= \{u \in U \mid \|f^{-n}(x) - f^{-n}(y)\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty\}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

Uma generalização dos conjuntos hiperbólicos são os conjuntos parcialmente hiperbólicos ou não-uniformemente hiperbólicos. No que resta deste capítulo só daremos a sua definição e a relação com a decomposição de Oseledec. Porém, para entender esses conceitos, precisamos antes definir a propriedade de decomposição dominada, em particular, a decomposição de Oseledec dominada.

### 3.7 Decomposição de Oseledec dominada

Seja  $M$  uma variedade compacta de dimensão  $N \geq 2$ . Seja  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo e  $\Lambda \subset M$  um conjunto  $f$ -invariante. Supor que para cada  $x \in \Lambda$  existem subespaços não nulos  $E_x^{(1)}$  e  $E_x^{(2)}$  tal que  $T_x M = E_x^{(1)} \oplus E_x^{(2)}$ , a dimensão de  $E_x^{(1)}$  e  $E_x^{(2)}$  são constantes para todo  $x \in \Lambda$ , e os subespaços são  $Df$ -invariantes:  $Df_x(E_x^{(i=1,2)}) = E_{f(x)}^{(i=1,2)}$ .

*Definição [11].* Dado  $\tau \in \mathbb{R}^+$ , dizemos que  $T_x M = E_x^{(1)} \oplus E_x^{(2)}$  é uma *decomposição  $\tau$ -dominada* se

$$\frac{\|D_x f^\tau v_x^{(2)}\|}{\|D_x f^\tau v_x^{(1)}\|} \leq \frac{1}{2}. \quad (3.22)$$

Denotamos por  $E_x^{(1)} \succ_\tau E_x^{(2)}$  se a decomposição é  $\tau$ -dominada. Se a desigualdade (3.22) é mantida, então a magnitude de vetores unitários em  $E_x^{(1)}$ , depois de serem evoluídos por um tempo  $\tau$ , é pelo menos duas vezes a magnitude de vetores unitários em  $E_x^{(2)}$  depois de serem evoluídos por um mesmo tempo  $\tau$ . A razão do lado esquerdo de (3.22) pode ser considerado como o grau da  $\tau$ -decomposição dominada [57]. De forma mais geral, uma decomposição  $T_\Lambda M = E_x^{(1)} \oplus \dots \oplus E_x^{(k)}$  é  $\tau$ -dominada se

$$(E_x^{(1)} \oplus \dots \oplus E_x^{(j)}) \succ_\tau (E_x^{(j+1)} \oplus \dots \oplus E_x^{(k)}) \quad \forall 1 \leq j \leq k. \quad (3.23)$$

Dizemos que uma decomposição  $T_x M = E_x^{(1)} \oplus \dots \oplus E_x^{(k)}$  é  $\tau$ -dominada em  $x$ , para algum ponto  $x \in \Lambda$ , se é dominada quando restrita na trajetória  $\{f^\tau(x); \tau \in \mathbb{R}^+\}$  de  $x$ . Se a decomposição  $T_x M = E_x^{(1)} \oplus \dots \oplus E_x^{(k)}$  é a decomposição de Oseledec, então dizemos que é uma decomposição de Oseledec  $\tau$ -dominada [11].

### 3.8 Conjuntos parcialmente hiperbólicos

Considere um conjunto  $\Lambda \subseteq M$  compacto  $f$ -invariante e assumamos que  $Df$ -preserva uma decomposição do fibrado tangente  $T_\Lambda M$  nos seguintes três subespaços para quase todo  $x \in \Lambda$

$$T_x M = E_x^{(u)} \oplus E_x^{(c)} \oplus E_x^{(s)}, \quad (3.24)$$

onde  $E_x^{(s)}$  contrai uniformemente,  $E_x^{(u)}$  expande uniformemente,  $E_x^{(u)} \succ (E_x^{(c)} \oplus E_x^{(s)})$  e  $(E_x^{(u)} \oplus E_x^{(c)}) \succ E_x^{(s)}$ . Dizemos que

- $\Lambda$  é *uniformemente hiperbólico* ou simplesmente *hiperbólico* se  $E_x^{(c)} = 0$ .
- $\Lambda$  é *parcialmente hiperbólico* se algum,  $E_x^{(s)}$  ou  $E_x^{(u)}$  é não nulo.
- $\Lambda$  é *fortemente parcialmente hiperbólico* se ambos,  $E_x^{(s)}$  e  $E_x^{(u)}$  são não nulos.

Em particular, assumamos que para todo  $x \in \Lambda$  permite a decomposição de Oseledec  $T_x M = E_x^{(1)} \oplus \dots \oplus E_x^{(j)} \oplus E_x^{(m)}$  com expoentes de Lyapunov,  $\lambda_x^{(1)} > \lambda_x^{(j-1)} > 0$ ,  $\lambda_x^{(j)} = 0$ , e  $0 > \lambda_x^{(j+1)} > \lambda_x^{(m)} > 0$ . Então

$$E^{(u)} = \bigoplus_{i=1}^{j-1} E_x^{(i)}, \quad E^{(c)} = E_x^{(j)}, \quad E^{(s)} = \bigoplus_{i=j+1}^m E_x^{(i)}. \quad (3.25)$$

Para mais detalhes desta teoria [11, 57, 98].

### 3.9 Geometria no espaço de fase

Seja  $g$  uma função que relaciona a cada ponto no espaço de fase um número real. A análise das estruturas que formam os valores de  $g$  no espaço de fase, será chamado de *geometria de  $g$  no espaço de fase*. A função  $g$  usualmente vai ser uma função apropriada dos FTLEs e dos ângulos médios. A análise destas estruturas irá complementar nosso estudo da hiperbolicidade e aprisionamento dinâmico.

---

## 4. Estatística local da decomposição de Oseledec

---

Já apresentadas as bases teóricas, neste capítulo apresentamos a primeira parte dos nossos resultados. Embora o teorema de Oseledec é aplicável para uma grande variedade de sistemas de dimensão finita qualquer. O nosso trabalho numérico vai focar em sistemas hamiltonianos de baixa dimensão, em particular, no sistema de Hénon-Heiles e o mapa padrão. O sistema de Hénon-Heiles é um sistema contínuo quadridimensional no espaço de fase, enquanto o mapa padrão é um sistema discreto bidimensional.

Os FTLEs e os ângulos médios entre os subespaços de Oseledec serão considerados como as observáveis na análise. A maioria dos estudos tem focado nos FTLEs mais instáveis,  $\lambda_{\tau,x}^{(1)}$ , isto porque eles quantificam a maior sensibilidade das condições iniciais (relevante na dinâmica caótica), ou pela sua facilidade de cálculo numérico. Além disso, alguns autores assumem que os FTLEs associados à direção estável não contém mais informação do que as fornecidas pela direção instável (como se verá mais adiante, isto é verdade se considerarmos um tempo suficientemente grande no cálculo dos FTLE).

Primeiramente apresentaremos a dinâmica dos sistemas mencionados acima, assim como a aplicação do teorema de Oseledec e os resultados numéricos da decomposição dos subespaços nas regiões caóticas. Um estudo estatístico dos FTLEs locais e os ângulos locais será realizado brevemente, sendo mais detalhado no mapa padrão. Enquanto a primeira parte deste capítulo é dedicado ao sistema de Hénon-Heiles, a segunda parte será dedicada ao mapa padrão.

### 4.1 Sistema de Hénon-Heiles

Devido à variedade de propriedades dinâmicas no espaço de fase, o sistema de Hénon-Heiles tornou-se um dos exemplos mais simples e clássicos de sistemas contínuos apresentando dinâmica caótica. Foi proposto para descrever o comportamento de galáxias [99–101], porém, o sistema de Hénon-Heiles também pode ser visto como dois osciladores acoplados a uma perturbação cúbica. Neste caso, a hamiltoniana é dada por

$$H_f = \frac{p_{\tilde{q}_1}^2 + p_{\tilde{q}_2}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} (\tilde{q}_1^2 + \tilde{q}_2^2) + k_f \left( \tilde{q}_1^2 \tilde{q}_2 - \frac{\tilde{q}_2^3}{3} \right), \quad (4.1)$$

onde  $m$  é a massa,  $\omega > 0$  tem unidade de frequência [ $s^{-1}$ ], e  $k_f \in \mathbb{R}$  sendo a intensidade de acoplamento, tem unidade de [ $Kg/ms^2$ ]. A energia total  $E_f = H_f$  é conservada. Usando as

variáveis adimensionais  $p_{q_1} = p_{\tilde{q}_1}/mL\omega$  e  $q_1 = \tilde{q}_1/L$ , onde  $L$  tem unidade de comprimento, (o mesmo para a variável  $q_{2f}$ ), a hamiltoniana (4.1) torna-se a hamiltoniana adimensional

$$H = \frac{p_{q_1}^2 + p_{q_2}^2}{2} + \frac{q_1^2 + q_2^2}{2} + q_1^2 q_2 - \frac{q_2^3}{3}, \quad (4.2)$$

onde a energia  $E = H$  é medida em unidades de  $[H_f/(m\omega^2 L^2)]$  e  $k_f L/m\omega^2 = 1$ . Como consequência, o único parâmetro é a energia total do sistema  $E$ , a qual cumpre o papel do parâmetro não linear. Nós denotamos  $\varphi^t(x)$  ao fluxo gerado por (4.2).

O potencial de Hénon-Heiles,  $V(q_1, q_2) = (q_1^2 + q_2^2)/2 + q_1^2 q_2 - q_2^3/3$ , tem quatro valores de derivada nula os quais são mostrados na Fig. 7-(a). O ponto  $x_0^*$  é um mínimo com valor de potencial  $V(x_0^*) = 0$ , enquanto que os outros três pontos,  $q_{i=1,2,3}^*$ , são pontos de sela com valor de potencial igual a  $V(x_i^*)_{i=1,2,3} = 1/6$ . Dado que estamos lidando com um potencial conservativo bidimensional, podemos analisar qualitativamente as trajetórias para diferentes condições iniciais com energia  $E$ , a partir das equipotenciais de  $V(q_1, q_2)$ .

A projeção no plano  $(q_1, q_2)$  na Fig. 7.a mostra curvas equipotenciais para diferentes valores de  $V$ , enquanto a Fig. 7.b mostra a equipotencial fechada,  $V_c = 1/6$  que contem os três pontos de sela do potencial, o valor do ponto mínimo é mostrado também. Esse equipotencial, assim como os valores do potencial nos pontos extremos, nos permite separar diferentes comportamento qualitativos.

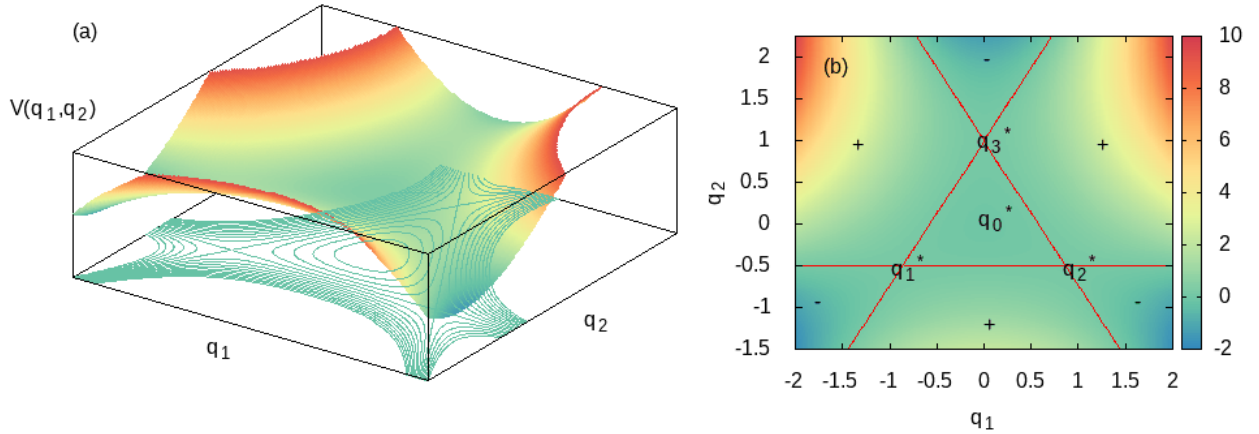


Figura 7 – Potencial (esquerda) e superfícies (direita) do sistema de Hénon-Heiles.

Para energias  $E \in (-\infty, 0) \cap (V_c, \infty)$ , as trajetórias em geral divergem para quase toda condição inicial. Para uma energia  $E \in [0, V_c]$  e condições iniciais nas regiões  $-$  e  $+$  na Fig. 7.b, as trajetórias em geral também irão divergir. E por último, para uma energia  $E \in [0, V_c]$  e condições iniciais dentro da curva equipotencial corresponde as trajetórias permanecerão limitadas para todo o tempo.

Que as trajetórias sejam limitadas para todo o tempo significa que estão definidas sobre *superfícies de energia compacta*, nas quais focaremos nosso estudo. Portanto, estamos



interessados na dinâmica das trajetórias caóticas com energia  $E \in (0, 1/6) = (0, E_c)$  e cuja condição inicial encontra-se dentro das curvas equipotenciais fechadas da energia correspondente. Denotamos com  $\Gamma_E \subset M$  às regiões de superfícies de energia cuja dinâmica é compacta.

## 4.2 Dinâmica no espaço de fase

Das equações canônicas de Hamilton (2.9), encontramos que a hamiltoniana (4.2) leva ao seguinte sistema de equações diferenciais de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= p_{q_1}, & \dot{p}_{q_1} &= -q_1(1 + 2q_2), & E &= H(q_1, q_2, p_{q_1}, p_{q_2}), \\ \dot{q}_2 &= p_{q_2}, & \dot{p}_{q_2} &= q_2^2 - q_1^2 - q_2, \end{aligned} \quad (4.3)$$

assim, o fluxo hamiltoniano evolui num espaço de fase 4-dimensional. Como estamos tratando um sistema hamiltoniano conservativo  $2N$ -dimensional, os pontos fixos das equações de Hamilton estão relacionados com os extremos do potencial. Pode-se demonstrar que o mínimo no potencial corresponde a um ponto fixo estável, enquanto os pontos de sela são pontos fixos instáveis.

Como a energia total  $E$  é conservada, o conjunto de estados possíveis podem ser mapeados a uma superfície 3-dimensional. Além disso, a partir da interseção das trajetórias numa apropriada seção de Poincaré, pode-se estudar visualmente o comportamento da sua dinâmica.

**Considerações sobre as simulações no espaço de fase.** O método de Runge-Kutta de quarta ordem é utilizado para a integração das equações de movimento [102], é escolhida um passo de integração fixo igual a  $\Delta\tau = 0.01$ . Aproveitando a simetria da hamiltoniana em  $q_1$ , construímos o mapa de Poincaré através das intersecções sucessivas de trajetória evoluindo no tempo com o plano em  $q_1 = 0$ , numericamente, o plano é construído através de uma aproximação linear entre os pontos sucessivos da trajetória tal que o sinal de  $q_1$  muda. Uma distribuição inicial de condições iniciais que contenha a maior porção do conjunto  $\Gamma_E$  e de forma aleatória para uma energia  $E$  dada é vital. Para conseguir isto, primeiro de tudo encontramos os valores mínimos e máximos das variáveis  $q_1$  e  $q_2$  da curva equipotencial de energia  $V(q_1, q_2) = E$ . Para a variável  $q_1$  é trivial, mas para a variável  $q_2$  é preciso resolver um polinômio de terceiro grau. Logo, geramos distribuições uniformes nestes intervalos limitados pelas raízes nas variáveis  $q_1$  e  $q_2$ . Depois, as condições que não cumpram  $V(q_1^i, q_2^i) \leq E$  são eliminadas. Para obter os valores dos momentos iniciais, escolhemos um número aleatório  $\alpha \in [0 : 2\pi]$  e usamos  $p_{q_1^i} = \sqrt{2[E - V(q_1^i, q_2^i)]} \cos \alpha$ ,  $p_{q_2^i} = \sqrt{2[E - V(q_1^i, q_2^i)]} \sin \alpha$ , onde  $V(q_1^i, q_2^i)$  é o valor da energia potencial nos pontos  $(x_i, y_i)$ . Se desejamos que as condições iniciais estejam na seção de Poincaré, utilizamos o mesmo procedimento, com a exceção de que  $q_1 = 0$ .

Estudemos a dinâmica das trajetórias através do mapeamento na seção de Poincaré. Na Fig. 8 são mostradas as seções de Poincaré para quatro diferentes energias (a)  $1/24$ , (b)  $1/12$ . (c)  $E = 1/8$  e (d)  $E = E_c = 1/6$ . As regiões contendo trajetórias caóticas são observadas como pontos desordenados dentro da seção de Poincaré, por exemplo, em torno do ponto  $(q_2, p_{q_2}) = (-0,15,0)$  na Fig. 8(c). Incrementando a energia, essas regiões ocupam uma área maior. Enquanto as áreas das regiões que contém trajetórias regulares vão diminuindo, as quais podem ser observadas como curvas regulares pontilhadas (círculos, elipses), por exemplo, em torno do ponto  $(q_2, p_{q_2}) = (0,25,0)$  na Fig. 8(b).

As regiões conexas contendo trajetórias regulares são chamadas de ilhas de regularidade. Um sistema com espaço de fase onde coexistem ilhas de regularidade e regiões caóticas é chamado de *sistema com espaço de fase mista*. Observa-se que neste intervalo de energias, a região caótica não ocupa a seção de Poincaré toda. Vemos ilhas de regularidade com área considerável, porém, as duas ilhas com centro em  $(q_2, p_{q_2}) = (0, \pm 0,27)$  desaparecem para uma energia  $E_c$ . Uma descrição mais detalhada da transição à dinâmica caótica será apresentada para o mapa padrão.

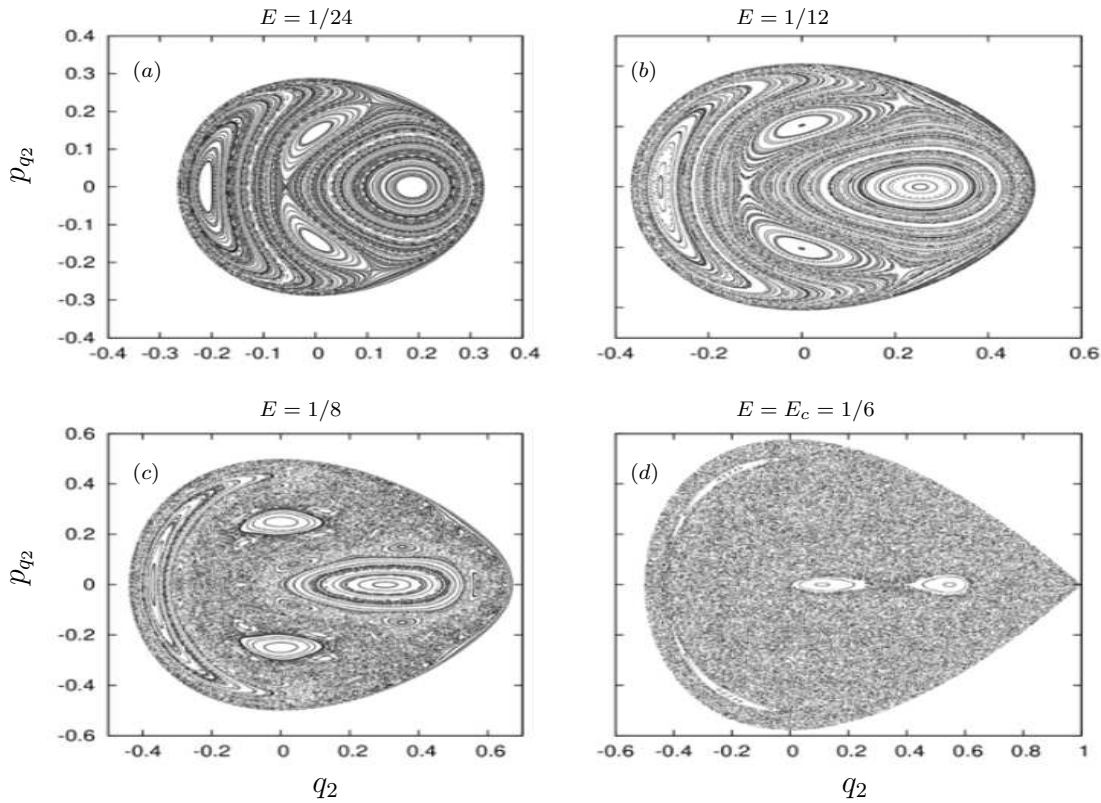


Figura 8 – Dinâmica das trajetórias na seção de Poincaré para diferentes energias do sistema de Hénon-Heiles.

### 4.3 Teorema de Oseledec para sistemas hamiltonianos quadrimensionais

Consideramos  $\varphi^t(x)$  um fluxo hamiltoniano quadrimensional da hamiltoniana  $H$ , o espaço de fase é uma variedade simplética compacta,  $M$ , e seja  $D_x\varphi^t : T_xM \rightarrow T_{x_t}M$  a diferenciável. Dado  $\mu$  uma medida invariante, em quase todo ponto  $x \in M$  temos duas possibilidades [61, 103]

(I) A decomposição do espaço tangente é trivial, sendo  $T_xM = E_x$  4-dimensional e

$$\lim_{\pm\infty} \frac{1}{t} \log \|D_x\varphi^t v\| = 0, \quad v \in E_x. \quad (4.4)$$

Os pontos com esta decomposição trivial geram trajetórias regulares.

(II) Existe a seguinte decomposição do espaço tangente

$$T_xM = E_x^{(u)} \oplus E_x^{(c)} \oplus E_x^{(s)}, \quad (4.5)$$

onde  $E_x^{(u)}$  e  $E_x^{(s)}$  são unidimensionais e  $E_x^{(c)}$  é bidimensional. Os seguintes limites existem

$$\begin{aligned} i) \quad & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|D_x\varphi^t u\| = \lambda, & \text{para } u \in E_n^{(u)} \\ ii) \quad & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|D_x\varphi^t v\| = -\lambda, & \text{para } v \in E_n^{(s)} \\ i) \quad & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|D_x\varphi^t w\| = 0, & \text{para } w \in E_n^{(c)}; \end{aligned} \quad (4.6)$$

Esses subconjuntos são invariantes sob a evolução  $D_x\varphi^t$ , isto é

$$D_x\varphi^t v_x^{(i)} = v_{\varphi^t(x)}^{(i)}, \quad \rightarrow \quad v_x^{(i)} \in E_x^{(i)}, \quad v_{\varphi^t(x)}^{(i)} \in E_{\varphi^t(x)}^{(i)}. \quad (4.7)$$

O subespaço central pode ser decomposto na direção trivial definida pela direção do fluxo,  $E_x^{(f)}$  e a direção perpendicular a este

$$E_x^{(c)} = \tilde{E}_x^{(c)} \oplus E_x^{(f)}, \quad (4.8)$$

com  $\sin \angle (\tilde{E}_x^{(c)}, E_x^{(f)}) = 0$  [61, 103]. Deixamos para um estudo posterior a decomposição (4.8). Logo, o espectro de Lyapunov para o sistema de Hénon-Heiles para  $x \in \Lambda$  é

$$\text{Sp}(\Lambda) = \{\lambda, 0, 0, -\lambda\}, \quad \lambda > 0, \quad E \in (0, E_c) \quad (4.9)$$

Usamos o algoritmo de Ginelli [84, 85] para encontrar a decomposição de Oseledec na base dos CLVs,  $v_x^{(i=1, \dots, 4)}$ . Então  $E_x^{(u)} = \text{span}\{v_x^{(1)}\}$ ,  $E_x^{(c)} = \text{span}\{v_x^{(2)}, v_x^{(3)}\}$  e  $E_x^{(s)} = \text{span}\{v_x^{(4)}\}$ . Para a integração numérica da evolução no espaço tangente,  $D\varphi_x^t : T_xM \rightarrow T_{x_t}M$ , usamos o algoritmo de Runge-Kutta de quarta ordem, com um passo de integração

igual ao passo de integração das equações no espaço de fase,  $\Delta\tau = 0,01$ . Para um tempo  $t = m\Delta\tau$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ) o FTLEs é dado por

$$\lambda_{\tau,x}^{(i)} = \frac{1}{\tau} \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_{\Delta\tau,x+j\Delta\tau}^{(i)}. \quad (4.10)$$

Nomeamos de FTLEs instável aquele associado ao subespaço  $E_x^{(u)}$ , de FTLEs estável aquele associado ao subespaço  $E_x^{(s)}$  e de FTLEs centrais àqueles associados ao subespaço central  $E_x^{(c)}$ . Denominamos de FTLEs locais quando  $\tau = \Delta\tau$ . Para cada trajetória, é calculado primeiramente o espectro de Lyapunov para um tempo de  $t = 2 \times 10^5$ , se o maior expoente de Lyapunov é maior que 0,05 então consideramos que a trajetória correspondente é caótica, e os CLVs são computados. Para cada trajetória, é usado um transiente de  $t = 1000$ . A estatística foi realizada considerando aproximadamente 5000 trajetórias caóticas.

#### 4.4 FTLEs locais no sistema de Hénon-Heiles

Começando com os resultados estatísticos do sistema de Hénon-Heiles. Na Fig. 9 são mostradas as distribuições de probabilidade dos FTLEs locais com uma energia de  $E = E_c = 1/6$ . No painel (a) as distribuições de  $\lambda_{\Delta\tau,x}^{(u)}$  (cor roxa) e  $\lambda_{\Delta\tau,x}^{(s)}$  (cor azul) são exibidas. No painel (b) as distribuições de  $\lambda_{\Delta\tau,x}^{(2)}$  e  $\lambda_{\Delta\tau,x}^{(3)}$  (cor azul) associadas ao subespaço central. Nestas simulações usamos  $\Delta\tau = 0,01$ . Vemos que as distribuições associadas aos subespaços  $E_x^{(u)}$  e  $E_x^{(s)}$  são antissimétricas entre si, enquanto as distribuições associadas ao subespaço central  $E_x^{(c)}$  são iguais tendo a maior probabilidade em torno de zero. As simulações mostram que  $\lambda_{\Delta\tau,x}^{(2)} \approx \lambda_{\Delta\tau,x}^{(3)}$ , além disso, convergem rapidamente à zero quanto  $\tau$  aumenta.

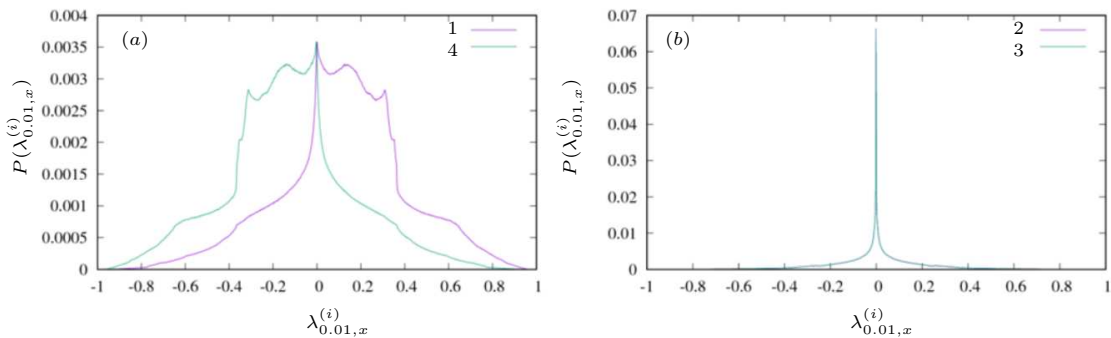


Figura 9 – Distribuição dos expoentes de Lyapunov locais. (a) instável (cor roxa) e estável (cor azul); (b) centrais

Na Fig. 10 vemos em cores a geometria na seção de Poincaré dos FTLEs locais estáveis e instáveis, como energia  $E_c$ . As regiões em cor preta envoltas das regiões coloridas são ilhas de regularidade. As estruturas dos valores mostram espirais saindo das ilhas de regularidade e convergindo num ponto que era elíptico para energias menores, ver Fig. 8.

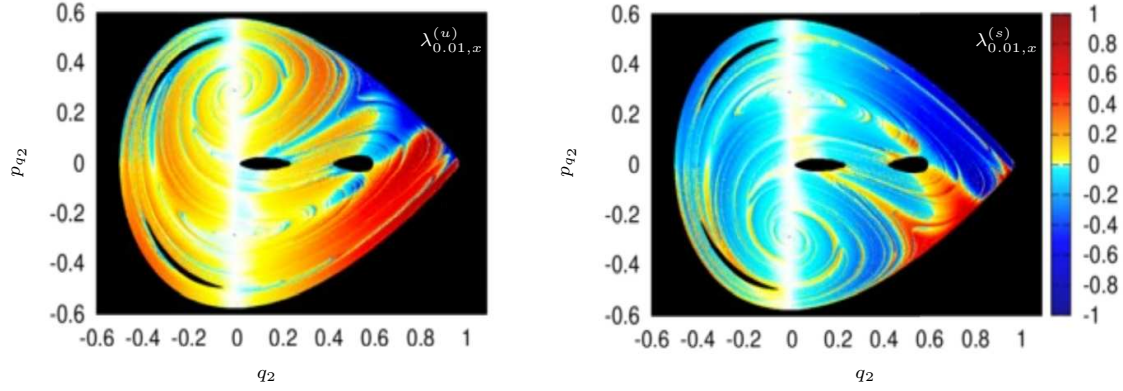


Figura 10 – Geometria na seção de Poincaré para uma energia  $E_c$  dos expoentes de Lyapunov locais instáveis (esquerda) e estáveis (direita),  $\lambda_{\Delta\tau,x}^{(u)}$  e  $\lambda_{\Delta\tau,x}^{(s)}$ , respectivamente. A cor preta em torno de cores corresponde a ilhas de regularidades.

## 4.5 Ângulos entre subespaços

Denotemos por  $\Theta_x^{(u,c)}$ ,  $\Theta_x^{(u,s)}$  e  $\Theta_x^{(c,s)}$  os ângulos locais entre os subespaços instável-central, instável-estável e central-estável em  $x \in \Lambda$ , respectivamente. Estes ângulos serão definidos no intervalo de  $(0, \pi/2)$ . O ângulo entre os subespaços instável-estável é

$$\cos \Theta_x^{(u,s)} = \langle v_x^{(1)} | v_x^{(4)} \rangle. \quad (4.11)$$

Para obter os ângulos associados ao subespaço central de dimensão 2, usamos a equação (3.11), assim

$$\cos^2 \Theta_x^{(us,c)} = \left\langle v_x^{(1,4)} \left| \frac{w_x^{(1)}}{|w_x^{(1)}|} \right. \right\rangle^2 + \left\langle v_x^{(1,4)} \left| \frac{w_x^{(2)}}{|w_x^{(2)}|} \right. \right\rangle^2 = \frac{\langle v_x^{(1,4)} | w_x^{(1)} \rangle^2}{|w_x^{(1)}|^2} + \frac{\langle v_x^{(1,4)} | w_x^{(2)} \rangle^2}{|w_x^{(2)}|^2} \quad (4.12)$$

onde  $\{w_x^{(1)}, w_x^{(2)}\}$  é uma base ortogonal de  $E_x^{(c)}$ , definida como

$$w_x^{(1)} = v_x^{(2)} + v_x^{(3)}, \quad w_x^{(2)} = v_x^{(3)} - v_x^{(2)}. \quad (4.13)$$

Nas simulações encontramos empiricamente que o ângulo entre os subespaços locais instável-central é igual ao ângulo entre os subespaços estável-central, isto é

$$\Theta_x^{(u,c)} = \Theta_x^{(c,s)}, \quad (4.14)$$

este resultado pode ser associado à simetria simplética do sistema, porém uma análise disto precisa ser feita. Portanto, o número de ângulo é reduzido a dois, pelo que vamos renomear da seguinte forma.

$$\Theta_x^{(u,s)} = \Theta_x, \quad \Theta_x^{(u,c)} = \Theta_x^{(c,s)} = \Omega_x, \quad (4.15)$$

Na figura 11 mostra-se os ângulos locais  $\Theta_x$  e  $\Omega_x$  na seção de Poincaré. No painel esquerdo o ângulo entre o subespaço estável-instável,  $\Theta_x$ , e no painel direito o ângulo  $\Omega_x$ .

Observa-se que os ângulos têm simetria em  $p_y$ . O ângulo entre os subespaços estáveis e instáveis em média são maiores que o ângulo  $\Omega_x$ . Ângulos maiores são encontrados em média afastados das ilhas de regularidade.

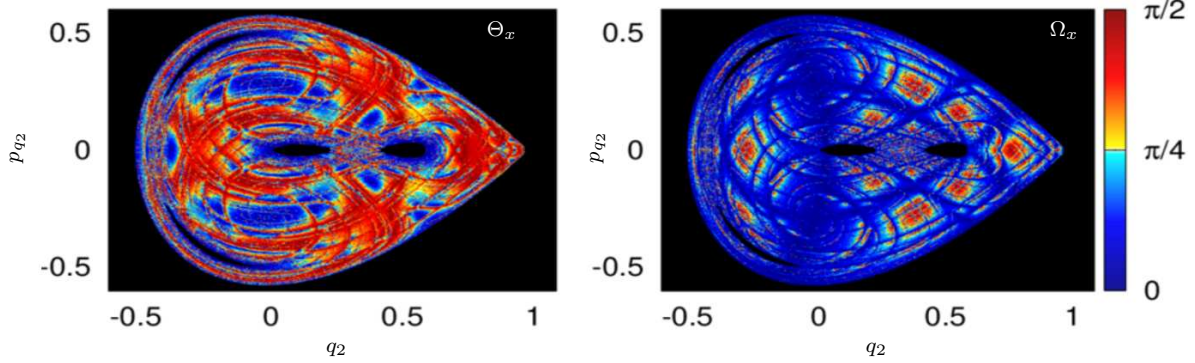


Figura 11 – Geometria dos ângulos  $\Theta_x$  (esquerda) e  $\Omega_x$  (direita) na seção de Poincaré. A cor preta em torno de cores corresponde a ilhas de regularidades.

Na Fig. 12 são mostradas as densidades de probabilidade dos ângulos  $\Theta_x$  e  $\Omega_x$  em função da energia. Para o ângulo  $\Theta_x$ , vemos que para uma energia  $0,5E_c$ , Fig. 12(1a), a maior probabilidade concentra-se próximo de zero. Aumentando a energia a maior probabilidade vai se deslocando para  $\pi/2$ , até atingir probabilidade quase zero para ângulos próximos de zero para uma energia  $E_c$ , ver Figs. 12(1a)-12(1f). Por outro lado, para o ângulo  $\Omega_x$  a probabilidade próximo de zero sempre é considerável para todas energias, sendo a maior para  $E > 0,65$ , ver Figs. 12(2a)-12(2f); para energias menores um pico na distribuição pode ser encontrada em torno de  $3\pi/8$ , ver Fig. 12(2a), que desaparece ao aumentar a energia.

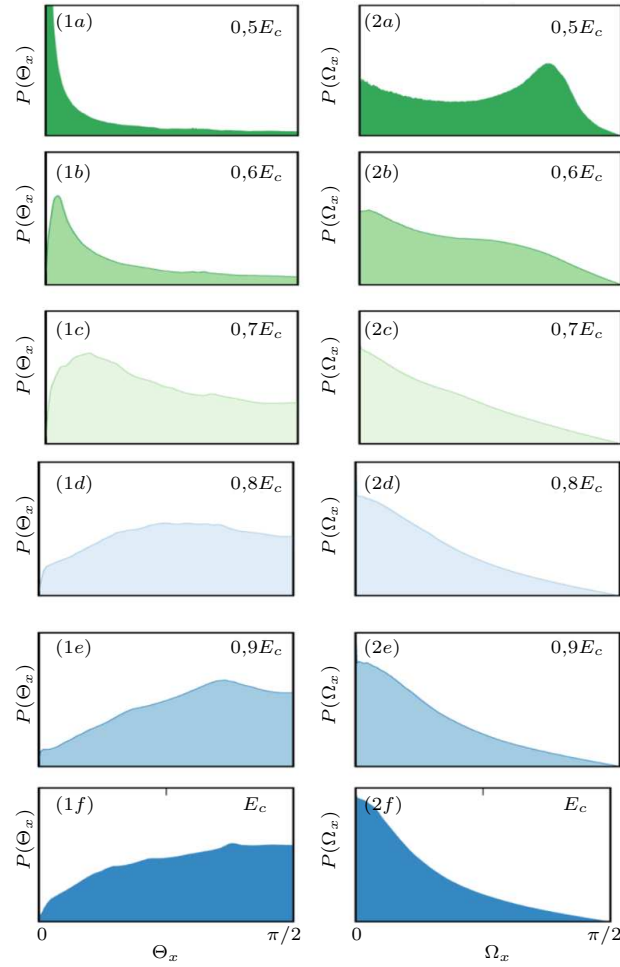


Figura 12 – Distribuição de probabilidade para os ângulos  $\Theta_x$  (esquerda) e  $\Omega_x$  (direita) em função da energia. As distribuições são normalizadas.

Antes de apresentar o sistema a tempo discreto, definamos os ângulos médios do sistema de Hénon-Heiles como segue

$$\Theta_{\tau,x} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt' \Theta_x(t') = \frac{1}{m\Delta t} \sum_{l=1}^m \Theta_x, \quad \Omega_{\tau,x} = \frac{1}{m\Delta t} \sum_{l=1}^m \Omega_x. \quad (4.16)$$

Nos próximos capítulos, esses ângulos médios vão ser usados para a análise a tempo finito.

## 4.6 Rotor pulsado

Um bom ponto de partida de sistema discreto é o sistema conhecido como *mapa padrão*. Embora se trata de um sistema discreto 2-dimensional, apresenta uma grande riqueza de propriedades dinâmicas, sendo um dos sistemas por excelência no estudo de fundamentos de sistemas hamiltonianos caóticos. As equações do mapa podem ser obtidas a partir de diferentes sistemas físicos, em particular, através do *kicked rotator*, um sistema mecânico modelado por uma dinâmica hamiltoniana [43, 44, 78].



Considerarmos o sistema mecânico composto por uma partícula, que está limitada a se movimentar sobre um anel. A partícula é periodicamente chutada por um campo homogêneo. Este sistema é descrito pela hamiltoniana adimensional

$$H[p_t, z_t, t] = \frac{p_t^2}{2} + k \cos(z_t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n), \quad (4.17)$$

onde  $\delta$  é a função *delta de Dirac*,  $z_t$  a posição angular (modulo  $2\pi$ ),  $p$  o momentum, e  $k$  a intensidade do chute. Pelas equações de Hamilton

$$\frac{\partial p_t}{\partial t} = k \sin[z(t)] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n), \quad \frac{\partial z_t}{\partial t} = p_t. \quad (4.18)$$

Integrando as equações de movimento do sistema e aplicando a técnica de mapeamento estroboscópico ou mapa  $T$ -time, podemos obter o mapa padrão. Para resolver estas equações, podemos separá-las em dois casos,  $n < t' < t < n + 1$ . O primeiro caso, quando a partícula é submetida a força externa temos

$$p_{n'} = \Delta p, \quad z_{n'} = z_n. \quad (4.19)$$

Integrando a primeira equação (4.18)

$$\Delta p = k \int_{n-\epsilon}^{n+\epsilon} dt \sin[z_t] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n) = k \sin(z_n), \quad (4.20)$$

assim a mudança no momento e na posição é

$$p_{n'} = k \sin(z_n) \quad z_{n'} = z_n + p_n(n' - n). \quad (4.21)$$

No outro caso, quando a evolução é livre temos

$$p_{n+1} = k \sin(z_n) + p_n \quad z_{n+1} = z_n + \Delta p(n + 1 - n'). \quad (4.22)$$

Fazendo  $n' = n$  y reorganizando os termos obtemos o seguinte mapa estroboscópico

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n + k \sin z_n & (\text{mod } 2\pi) \\ z_{n+1} &= z_n + p_{n+1} & (\text{mod } 2\pi), \end{aligned} \quad (4.23)$$

chamado mapa padrão [43, 44, 78].

## 4.7 Transição à dinâmica caótica

Vamos descrever qualitativamente a transição de uma dinâmica regular à dinâmica caótica no mapa padrão e sua visualização no espaço de fase em função do parâmetro não linear  $k$  [78]. Para isto, aplicamos numericamente o mapa (4.23) e incrementamos paulatinamente o parâmetro  $k$ . A explicação será dada de maneira intuitiva através da



observação de trajetórias no espaço de fase, Figs 13-15, e os valores de  $k$  são escolhidos de forma que as propriedades dinâmicas de interesse possam ser observadas. Para cada valor de  $k$ , usamos um número de 40 condições iniciadas alinhadas equitativamente no eixo  $p$  e  $z = \pi$ .

Para o caso trivial  $k = 0$  é bem sabido que o sistema é integrável que simplesmente descreve a partícula livre unidimensional, contendo apenas trajetórias periódicas e quase-periódicas ao longo do espaço de fase, ou em outras palavras, as trajetórias estão sobre toros racionais e irracionais. Aumentando o parâmetro  $k$ , com  $k \ll 1$ , o sistema se torna quase-integrável, onde os toros são levemente perturbados de forma não linear. No capítulo 3 vimos que existem regiões caóticas ao redor de separatrizes se associando a ressonâncias. Estas regiões persistem para qualquer valor do parâmetro  $k$ , no entanto, sua área tende a zero quando  $k \rightarrow 0$ , tendo uma transição não abrupta para  $k \ll 1$ , ver figura (13).

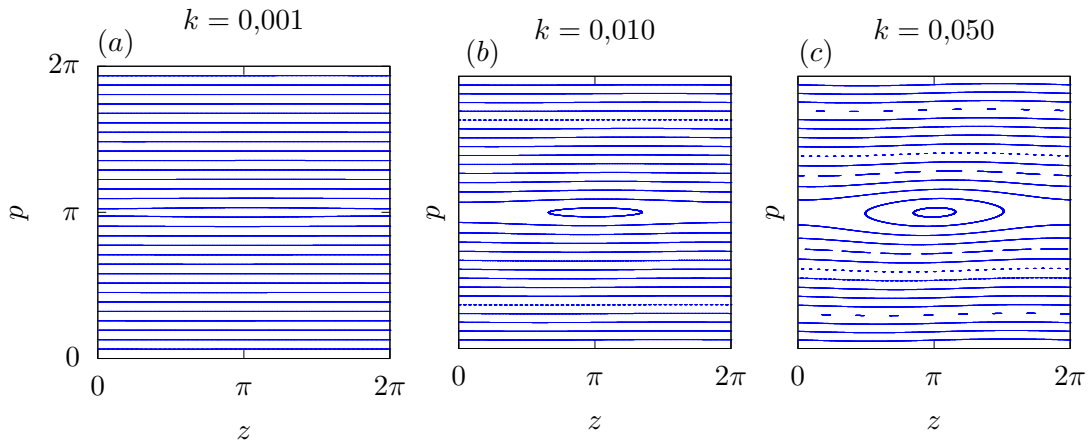


Figura 13 – Espaço de fase de uma dinâmica quase integrável. Toros são levemente perturbados de forma não linear.

Fixando um valor do parâmetro  $k$ , denotaremos de  $\Lambda \subset M$  à região caótica no espaço de fase, isto é, o subconjunto no espaço de fase dos pontos  $\mathbf{x} \in M$  que geram trajetórias caóticas. Incrementamos o parâmetro não linear,  $k$ , e consideramos o intervalo  $k = (0, k_c)$ , onde  $k_c$  é um parâmetro crítico para as curvas KAM. A transição vai se tornando cada vez mais abrupta, as trajetórias caóticas ocupam uma área maior no espaço de fase ao mesmo tempo que as áreas que contém as trajetórias regulares vão diminuindo enquanto o parâmetro não linear aumenta. Neste intervalo de  $k$ , a dinâmica caótica encontra-se intimamente relacionada aos toros KAM. Pode-se observar a existência de regiões caóticas não conectadas, que estão separadas por separatrizes, isto é, por curvas (curvas KAM para o mapa padrão) no espaço de fase que separam regiões com diferentes comportamentos dinâmicos.

Neste contexto, é chamado de *caos local* ou *caos fraco* à dinâmica no espaço de fase com comportamentos dinâmicos separados por separatrizes. O parâmetro crítico  $k_c$  é o valor do parâmetro não linear no qual a última curva KAM separando regiões caóticas é destruída. Estudos analíticos e numéricos têm sido realizados para encontrar o valor mais exato de  $k_c$  para o mapa padrão, e encontrado sendo aproximadamente  $k_c \approx 0,97 \dots$ , ver Fig. 14.

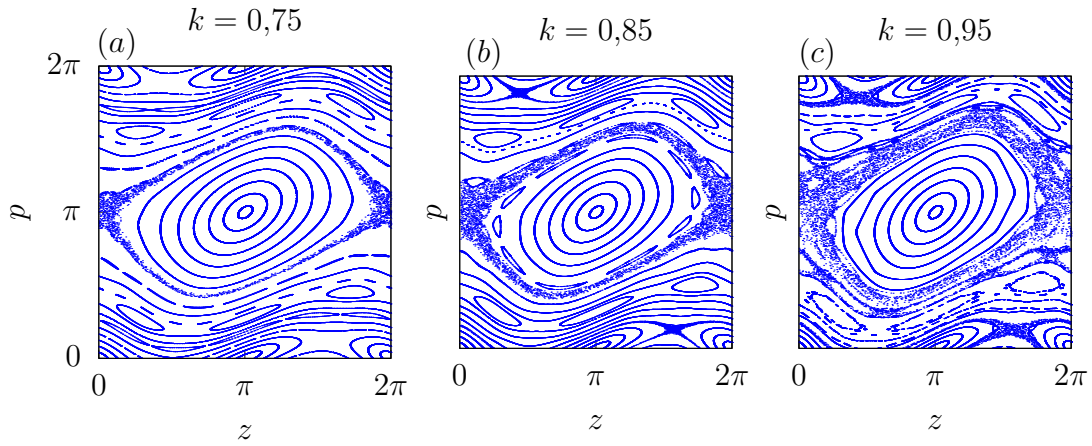


Figura 14 – Espaço de fase no cenário de caos local e mista. Regiões caóticas e ilhas de regularidade coexistem, as regiões caóticas estão desconectadas por toros ainda persistindo.

Finalmente, consideramos os valores do parâmetro de não linearidade maiores do que o parâmetro crítico,  $k_c$ , chamado de *caos global*. De forma geral, as seguintes transições são observadas (ver Fig. 15)

- (I) A dinâmica no espaço de fase continua sendo mista para todos os valores de  $k$  utilizados, ilhas de regularidade e regiões caóticas coexistem no espaço de fase, no entanto, a área das ilhas vai diminuindo, ainda relevantes para valores próximos de  $k_c$  e valores não suficientemente grandes. O valor da área das ilhas de regularidade tende a zero de forma não linear, enquanto  $k \rightarrow \infty$ .
- (II) Para  $k > k_c$  as regiões caóticas estão interligadas em grande parte do espaço de fase, permitindo que qualquer trajetória gerada por condições iniciais nessa região transita por toda a região caótica  $\Lambda$  para um tempo infinito,  $n \rightarrow \infty$ .
- (III) Para valores do parâmetro de não linearidade suficientemente grandes,  $k \gg 1$ , embora as ilhas de regularidade continuem a existir, a área com dinâmica caótica,  $\Lambda_k$ , abrange quase todo o espaço de fase. Em consequência, para esses valores grandes de  $k$ , resultados analíticos podem ser encontrados a aproximar a dinâmica caótica por uma dinâmica estocástica [43, 44].

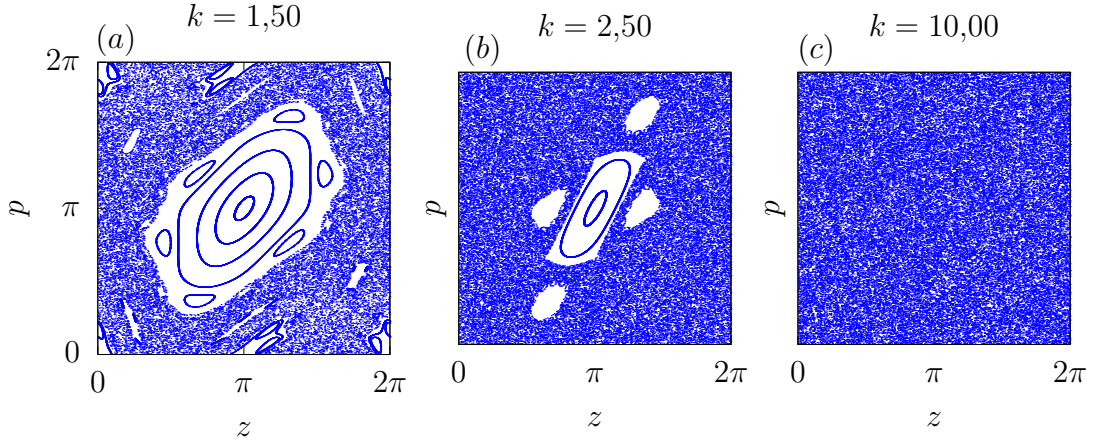


Figura 15 – (a)-(b) Espaço de fase numa dinâmica de caos global e mista, uma grande região caótica e ilhas de regularidade coexistem; (c) Espaço de fase numa dinâmica fortemente caótica. Existe uma grande região caótica e as áreas das ilhas de regularidade tende a zero de forma não linear.

Tendo uma noção geral da dinâmica no espaço de fase em função do parâmetro não linear  $k$ , estudemos a sua relação com os FTLEs e o ângulo entre os subespaços de Oseledec.

## 4.8 Decomposição de Oseledec para o mapa padrão

Fixando  $k$ , seja  $f : M \rightarrow M$  o mapa padrão (4.23), então para  $x \in M$  o espectro de Lyapunov está dado por

$$\text{Sp}(f) = \{\lambda, -\lambda\} \quad \lambda \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}. \quad (4.24)$$

Para  $\lambda = 0$  o espectro é trivial e  $x$  gera uma trajetória regular. Se  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  então

$$\begin{aligned} (1) \quad T_x M &= E_x^{(u)} \oplus E_x^{(s)}, & (2) \quad Df_x^n(E_x^{(i)}) &= E_{f(x)}^{(i)}; \\ (3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|D_x f^n v_x^{(\pm)}\| &= \pm \lambda, & \text{para } v_x^{(+)} \in E_x^{(u)}, v_x^{(-)} \in E_x^{(s)}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

O subespaço  $E_x^{(u)}$  ( $E_x^{(s)}$ ), chamado *subespaço local instável (estável)* de  $x$ , está associado à direção que expande (contraí) uniformemente sobre a dinâmica para tempos assintóticos [11]. Assim, os FTLEs instáveis e FTLEs estáveis são dados por  $\lambda_{\tau,x}^{(u)} = \frac{1}{\tau} \log \|D_x f^n v_x^{(+)}\|$  e  $\lambda_{\tau,x}^{(s)} = \frac{1}{\tau} \log \|D_x f^n v_x^{(-)}\|$ , respectivamente. O conjunto de pontos que gera as trajetórias caóticas  $\Lambda \subset M$ , é equivalente ao conjunto compostos de todos os pontos  $x \in M$  com espectro de Lyapunov não degenerado,  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ .

*Recorrências para o cômputo da decomposição de Oseledec.* Para o cálculo da decomposição de Oseledec (gerado pelos CLVs), aplicamos o algoritmo de Ginelli [84, 85],

porém, o esquema não será aplicado diretamente. Já que estamos lidando com um sistema bidimensional, é possível construir um conjunto de recorrências baseados neste esquema. Desta maneira, o cálculo se torna bem mais leve computacionalmente, além de eliminar o erro produzido pelo procedimento de ortogonalização de Gram Schmidt e economizar memória computacional. Estas recorrências foram encontradas por Salas e Artuso para os mapas gerais, tipo mapa padrão bidimensional e aplicado ao *geometrical standard map* [104]. No entanto, nós encontramos de forma independente as recorrências para o mapa (4.23), as quais são dadas com maior detalhe no apêndice A.2. No que segue, apresentamos os resultados estatísticos locais na decomposição de Oseledec.

## 4.9 Estatísticas dos FTLEs locais

Apresentamos nesta seção os resultados estatísticos dos FTLEs para  $\tau = 1$  e os ângulos locais para trajetórias caóticas. Os FTLEs para esse tempo serão chamados de locais. Em particular, observamos como as distribuições destes observáveis mudam em função do parâmetro não linear  $k$ . As distribuições de probabilidade são calculadas a partir de uma estatística suficientemente grande, usando milhares de pontos e dezenas/centenas de trajetórias com condições iniciais aleatórias na região caótica principal  $\Lambda \subseteq M$ . Dizemos que a região caótica principal do espaço de fase com parâmetro  $k$  é aquela que contém os valores entorno do ponto periódico hiperbólico em  $(p, z) = (\pi, 0)$ , sendo a região com maior área  $\mu(\Lambda)$  para quase todo  $k$ . A nossa análise estará focada no intervalo  $k = (0,5 : 15)$  do parâmetro não linear. Para os resultados desta seção foram usadas 500 condições iniciais com longitude tempo de  $10^7$  para cada uma delas, assim como um transiente de 20000 iterações.

Nas Figs. 16-17 são mostradas as distribuições dos FTLEs locais instáveis e estáveis,  $\lambda_{1,x}^{(u)}$  e  $\lambda_{1,x}^{(s)}$ , respectivamente. Na parte superior de cada figura, apresentamos as distribuições para todo o intervalo de  $k$  considerado. As duas linhas inferiores das figuras, mostram as distribuições com parâmetro não linear  $k$ ; (a)-(f)  $k = 0,60, 1,50, 2,50, 4,50, 10,0$  e  $k = 12,69$ , respectivamente. Para cada valor de  $k$ , a distribuição é independente.

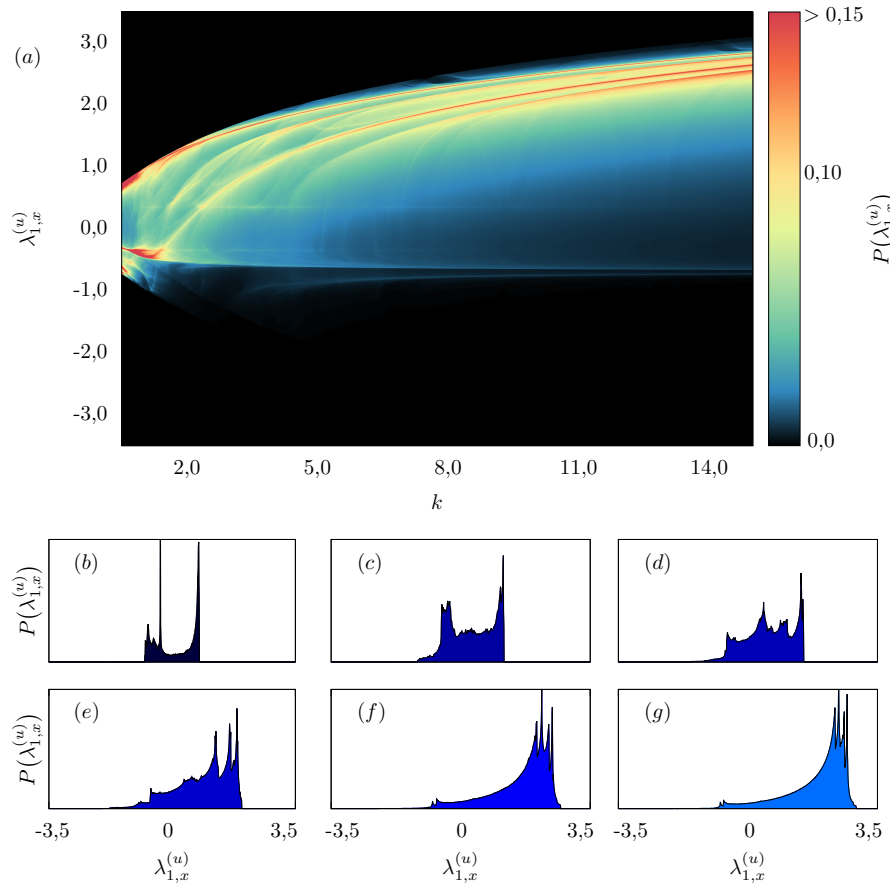


Figura 16 – Distribuição de probabilidade do expoente de Lyapunov local instável em função do parâmetro  $k$ . (a) Cada valor de  $k$  representa uma distribuição independente, onde a escala de cores representa o valor da probabilidade; (b)  $k = 0,60$ , (c)  $k = 1,50$ , (d)  $k = 2,50$ , (e)  $k = 4,50$ , (f)  $k = 10,0$ , (g)  $k = 12,69$ . As distribuições são normalizadas.

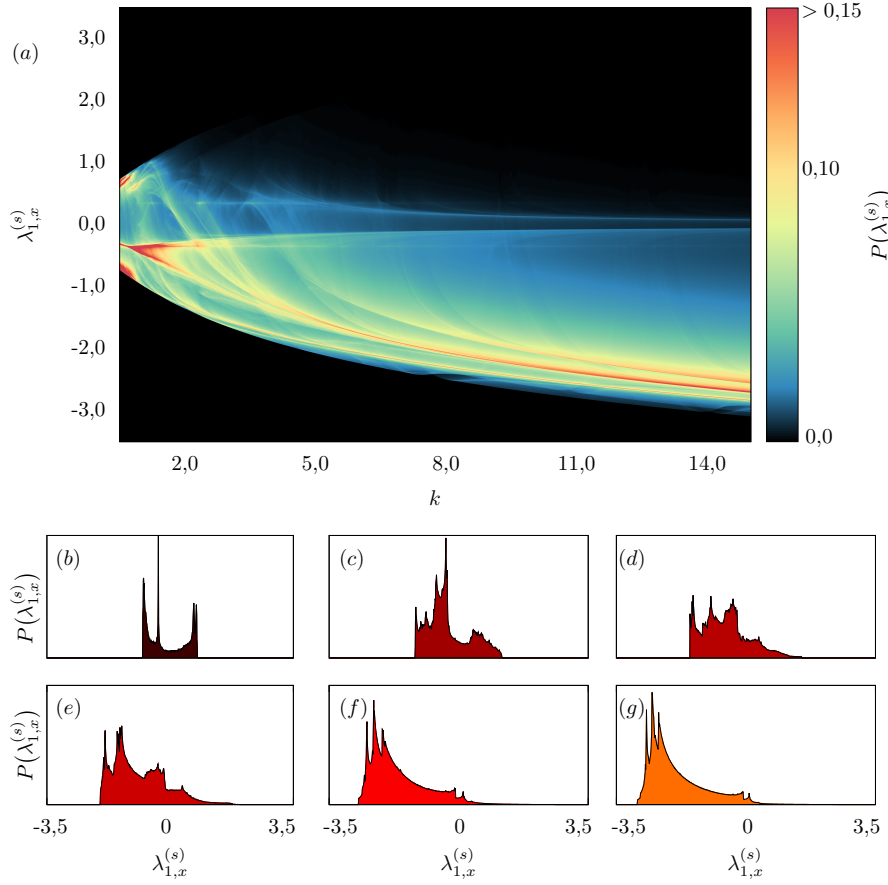


Figura 17 – Distribuição de probabilidade do expoente de Lyapunov local estável em função do parâmetro  $k$ . (a) Cada valor de  $k$  representa uma distribuição independente, onde a escala de cores representa o valor da probabilidade; (b)  $k = 0,60$ , (c)  $k = 1,50$ , (d)  $2,50$ , (e)  $4,50$ , (f)  $k = 10,0$ , (g)  $k = 12,69$ . As distribuições são normalizadas.

De forma geral, para todo valor de  $k$ , as distribuições dos FTLEs locais são antissimétricas entre si e em relação a zero, isto é, as características gerais das distribuições são semelhantes, com diferenças sutis, mas com sinal trocado, ou equivalentemente e abusando da notação,  $P_k(\lambda_{1,x}^{(u)}) \sim P_k(-\lambda_{1,x}^{(s)})$ , sendo mais antissimétricas para  $k$ . Em consequência, vamos descrever unicamente as características das distribuições para os FTLEs instáveis, sendo válidos os argumentos para as distribuições dos FTLEs estáveis, com a diferença de trocar o sinal.

Como é esperado, as distribuições ficam mais largas quando  $k$  aumenta, ao mesmo tempo, o valor absoluto da média vai aumentando. Valores negativos para todo valor de  $k$  são observados, porém, o seu peso fica menor enquanto  $k$  aumenta e sendo mais relevantes para valores pequenos  $k < 2$ , onde o espaço de fase é predominantemente mista e regular. Para valores maiores  $k > 2$ , a maior probabilidade encontra-se para valores de  $\lambda_{1,x}^{(u)}$  grandes. A média dos FTLEs locais é igual ao expoente de Lyapunov assintótico correspondente.

Como casos particulares, na parte inferior de cada figura são mostradas distribuições individuais para seis valores de  $k$ . (a)  $k = 0,60$ : A dinâmica no espaço de fase é local e mista, com regiões regulares sendo dominantes. Podemos observar que a maior probabilidade encontra-se para valores próximos a zero e próximos ao maior valor de  $\lambda_{l,x}^{(u)}$ . Para os valores (b):  $k = 1,50$  e (c) :  $k = 4,5$  a dinâmica se torna global e mista para o espaço de fase, tal que a região caótica fica maior. Enquanto que a probabilidade de encontrar valores próximos de zero vai diminuindo, esta probabilidade ainda é relevante. Ao mesmo tempo, vão-se acumulando valores positivos. Finalmente, (d)-(f) para  $k = 4,50$  e  $k = 10,0$ , respectivamente, a dinâmica vai se tornando mais caótica sendo aproximadamente quase-estocástica para  $k = 12,69$ , valores próximos de zero deixam de ter relevância estatística enquanto a probabilidade se acumula próximo ao maior valor.

Para quantificar a anti-simetria das distribuições, calculemos a seguinte distância para duas distribuições de probabilidade:

$$D_k = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda |P_1(\lambda) - P_2(-\lambda)| = \sum_i |P_1(\lambda_i) - P_2(-\lambda_i)|. \quad (4.26)$$

Observamos que para valores pequenos do parâmetro não linear  $k$ , as distribuições são menos antissimétricas, neste cenário a dinâmica é mista. Na Fig. 18 é mostrada a quantidade (4.26) para as distribuições dos FTLEs locais em função do parâmetro  $k$ .

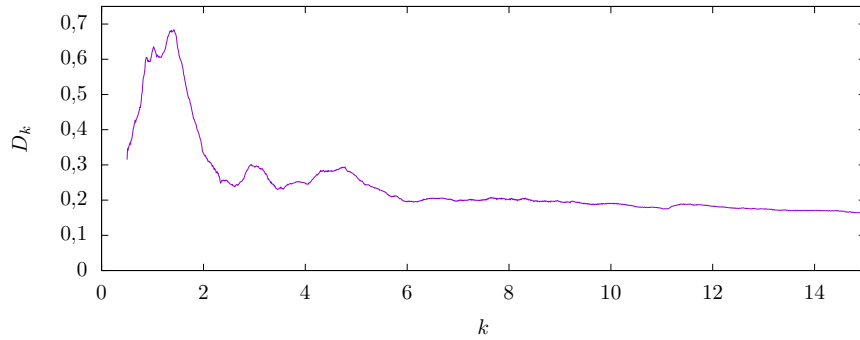


Figura 18 – Quantidade  $D_k$  entre as distribuições dos expoentes de Lyapunov local em função de  $k$ . A menor valor de  $D_k$  as distribuições são mais antissimétricas.

Embora nós usamos uma estatística suficientemente grande, não podemos descartar a possibilidade de as distribuições serem antissimétricas se considerarmos todos os pontos da região caótica,  $x \in \Lambda$ . Diferenças sutis são menores quando  $k$  aumenta, isto é, quando o espaço de fase é fortemente caótico, em consequência do fato de as trajetórias poderem visitar facilmente toda a região  $\Lambda$ . Por outro lado, a diferença é maior para valores pequenos de  $k$  e a dinâmica é predominantemente mista, ou equivalentemente as regiões caóticas e regulares têm a mesma relevância no espaço de fase, o que torna mais complexa a dinâmica das trajetórias caóticas, chegando a ter regiões de  $\Lambda$  ainda não visitadas. Enquanto o valor de  $k$  tende para zero a distância vai ficando menor.



Continuando com a análise estatística local, apresentamos a distribuição do ângulo local entre os subespaços  $E_x^{(u)}$  e  $E_x^{(s)}$ ,  $\theta_{1,x}$ . Esta distribuição tem sido usada para quantificar o grau de hiperbolicidade olhando a sua propriedade perto do zero, sendo mais hiperbólico quando a probabilidade condensa-se próximo da origem. Na parte superior da Fig. 19 estão plotadas as distribuições para todo o intervalo de  $k = (0,5,15)$  considerado, para o intervalo de  $k = [0,10]$  foi publicada a mesma figura em [68].

Observa-se que para valores pequenos de  $k$  a maior distribuição se encontra próximo a zero, enquanto para valores maiores de  $k$  a distribuição vai se acumulando pouco a pouco ao valor de  $\pi/4$  através de quatro caminhos, que correspondem aos ângulos com maior probabilidade em torno das ilhas de regularidade. Esses caminhos vão se tornando simétricos enquanto  $k$  aumenta. Vemos também que para os menores valores de  $k$ , concentra-se próximo da origem, o que indica uma menor hiperbolicidade para esses valores do parâmetro não linear  $k$ .

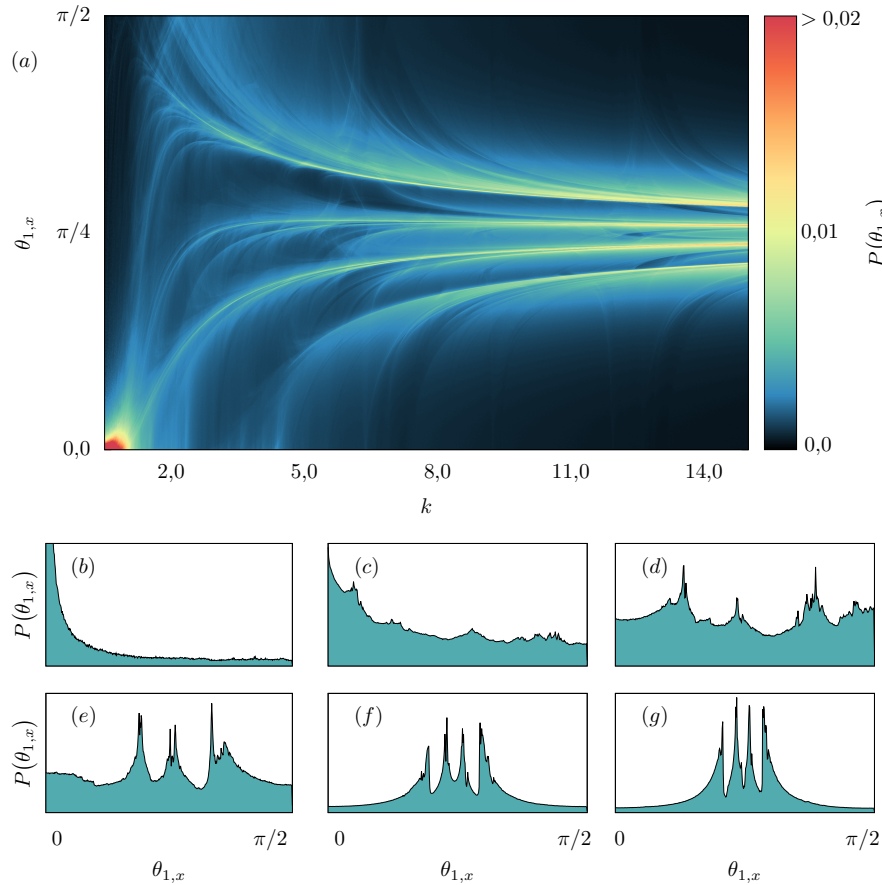


Figura 19 – Distribuição de probabilidade do ângulo local estável em função do parâmetro  $k$ . (a) Cada valor de  $k$  representa uma distribuição independente, onde a escala de cores representa o valor da probabilidade; (b)  $k = 0,60$ , (c)  $k = 1,50$ , (d)  $2,50$ , (e)  $4,50$ , (f)  $k = 10,0$ , (g)  $k = 12,69$ . As distribuições são normalizadas.



Na parte inferior da Fig. 19 mostra-se as distribuições individuais para os mesmos seis valores das distribuições dos FTLEs locais. Para (a) e valor de parâmetro  $k = 0,6$  a distribuição decai monotonamente, onde é esperado que o grau de hiperbolicidade seja menor. Aqui o espaço de fase é predominantemente regular. Em (b)-(c) a região regular e a região caótica coexistem com áreas similares, valores próximo a zero ainda são relevantes, porém em  $k = 1,5$  é menos hiperbólico que para  $k = 2,5$ , onde qualquer valor de ângulo é relevante. Os valores próximo a  $\pi/4$  aumentam com  $k$ .

Finalmente, para (d)-(f) os valores vão se acumulando quase-simetricamente ao redor de  $\pi/4$  e, ao mesmo tempo, vão diminuindo os valores próximo a zero e  $\pi/2$ .

## 4.10 Distribuição de probabilidade conjunta

Para obter a relação entre cada uma das quantidades anteriores, serão calculadas as distribuições de probabilidade conjunta<sup>1</sup> (comportamento simultâneo das probabilidades) e como elas mudam em função do parâmetro não linear  $k$ . Para os resultados desta seção foram usadas 500 condições iniciais com longitude tempo de  $10^7$  para cada uma delas, assim como um transiente de 20000 iterações. Na figura (20) são mostradas as distribuições conjuntas entre o FTLEs estável e instável para os seis diferentes valores do parâmetro não linear  $k$ ; (a)-(f)  $k = 0,60, 1,50, 2,50, 4,50, 10,0$  e  $k = 12,69$ , respectivamente.

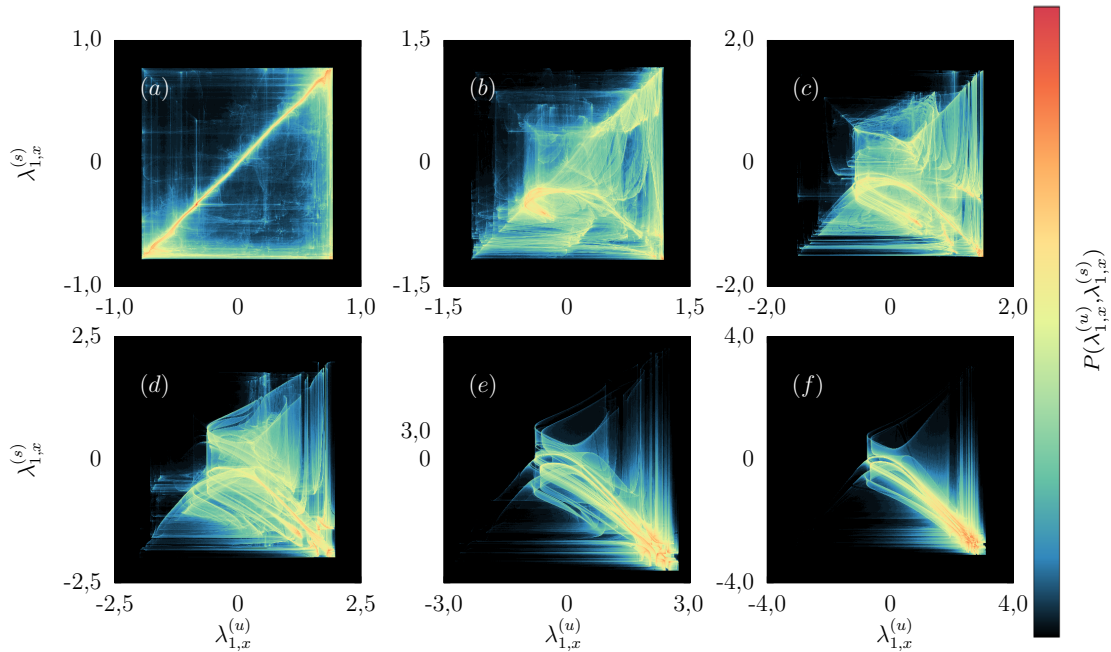


Figura 20 – Distribuição de probabilidade conjunta entre o expoente de Lyapunov local instável,  $\lambda_{l,x}^{(s)}$ , e o expoente de Lyapunov estável,  $\lambda_{l,x}^{(u)}$  em função do parâmetro  $k$ ; (a)  $k = 0,60$ , (b)  $k = 1,50$ , (c)  $2,50$ , (d)  $4,50$ , (e)  $k = 10,0$ , (f)  $k = 12,69$ . As distribuições são normalizadas.

<sup>1</sup> A função  $f(x,y)$  é a distribuição de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias  $x$  e  $y$  se: (1)  $f(x,y) \geq 0$ , (2)  $\iint dxdy f(x,y) = 1$ , (3)  $P(x_1 < x \leq x_2, y_1 < y \leq y_2) = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} dxdy f(x,y)$ .

Em (a) é mostrada a distribuição para um valor de parâmetro pequeno,  $k = 0,60$ , com espaço de fase local e mista, observa-se que é quase simétrica em relação à reta  $\lambda_{1,x}^{(u)} = \lambda_{1,x}^{(s)}$ , com maior probabilidade em torno deste eixo, acumulando-se maior probabilidade próximo a zero e aos valores de maior magnitude. Enquanto  $k$  aumenta, para (b)  $k = 1,5$ , (c)  $k = 2,5$  e (d)  $k = 3,5$ , com espaço de fase global e mista a probabilidade acima do eixo vai diminuindo assim como a função vai deixando de ser simétrica no eixo  $\lambda_{1,x}^{(u)} = \lambda_{1,x}^{(s)}$ , mas tende a ficar simétrica no eixo  $\lambda_{1,x}^{(u)} = -\lambda_{1,x}^{(s)}$ , acumulando-se a probabilidade através de estruturas na parte inferior dos eixos. Para valores de (e)  $k = 10,0$  e  $k = 12,69$  com o espaço de fase completamente caótico a distribuição vai se acumulando nos valores positivos do FTLEs instáveis com  $\lambda_{1,x}^{(u)} = -\lambda_{1,x}^{(s)}$ .

Portanto, vemos que para valores pequenos do parâmetro  $k$  é provável encontrar valores similares entre os FTLEs,  $\lambda_{1,x}^{(u)} \approx \lambda_{1,x}^{(s)}$ , no mesmo ponto  $x$ . Aumentando  $k$  é menos provável que  $\lambda_{1,x}^{(u)} < \lambda_{1,x}^{(s)}$ . Para valores grandes de  $k$  é mais provável encontrar valores de  $\lambda_{1,x}^{(u)}$  positivos e com magnitude similar a  $\lambda_{1,x}^{(u)}$ , mas com sinal oposto.

Para os mesmos seis valores do parâmetro não linear, na Fig. 21 são mostradas as distribuições conjuntas entre os FTLEs instáveis e os ângulos locais,  $P(\lambda_{1,x}^{(u)}, \theta_{1,x})$ .

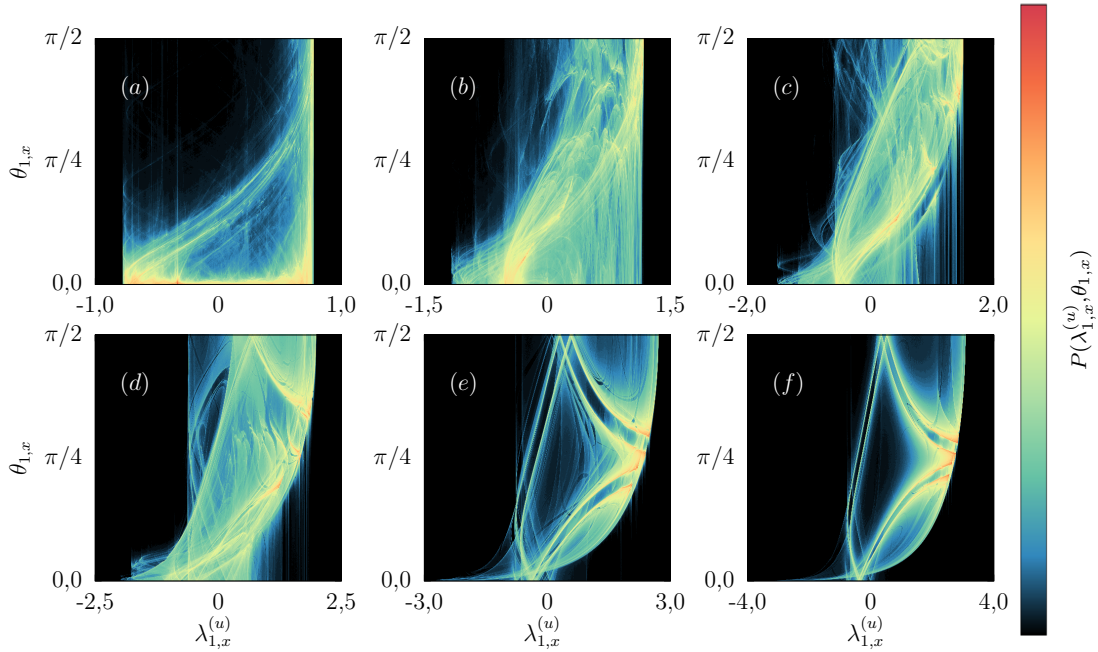


Figura 21 – Distribuição de probabilidade conjunta entre o expoente de Lyapunov local instável e o ângulo local em função do parâmetro  $k$ ; (a)  $k = 0,60$ , (b)  $k = 1,50$ , (c)  $2,50$ , (d)  $4,50$ , (e)  $k = 10,0$ , (f)  $k = 12,69$ . As distribuições são normalizadas.

Para valores pequenos de  $k$  e os valores mais negativos de  $\lambda_{1,x}^{(u)}$  a probabilidade de encontrar ângulos grandes é pequena, mas a probabilidade é maior para ângulos próximos de zero, diminuindo rapidamente enquanto  $k$  aumenta. Para os valores maiores de  $\lambda_{1,x}^{(u)}$  e  $k$  pequeno, é igualmente provável encontrar todos os valores dos ângulos. Aumentando

um pouco  $k$ , a probabilidade vai se acumulando para ângulos maiores, enquanto para valores muito grandes de  $k$  os ângulos ficam próximo a  $\pi/4$ . Para todo intervalo de  $k$ , e  $\lambda_{1,x}^{(u)}$  próximo a zero, é mais provável encontrar ângulos pequenos.

De forma similar, na figura (22) são mostradas as distribuições conjuntas entre os FTLEs estável e o ângulo para os mesmos seis diferentes valores do parâmetro não linear. As observações descritas para a figura (21) são válidas para esta distribuição só trocando o sinal para os FTLEs estável. Existem diferenças sutis entre as duas distribuições dos FTLEs instáveis (estáveis) com o ângulo, para ter uma ideia disso estudemos a distribuição conjunto da diferença dos FTLEs com  $\tau = 1$  e os ângulos. A diferença dos FTLEs em  $x$ , denotada por  $h_{\tau,x} = \lambda_{\tau,x}^u - \lambda_{\tau,x}^{(s)}$ , esta intimamente relacionada na determinação da hiperbolicidade, isso vai ser visto com maior detalhe no próximo capítulo.

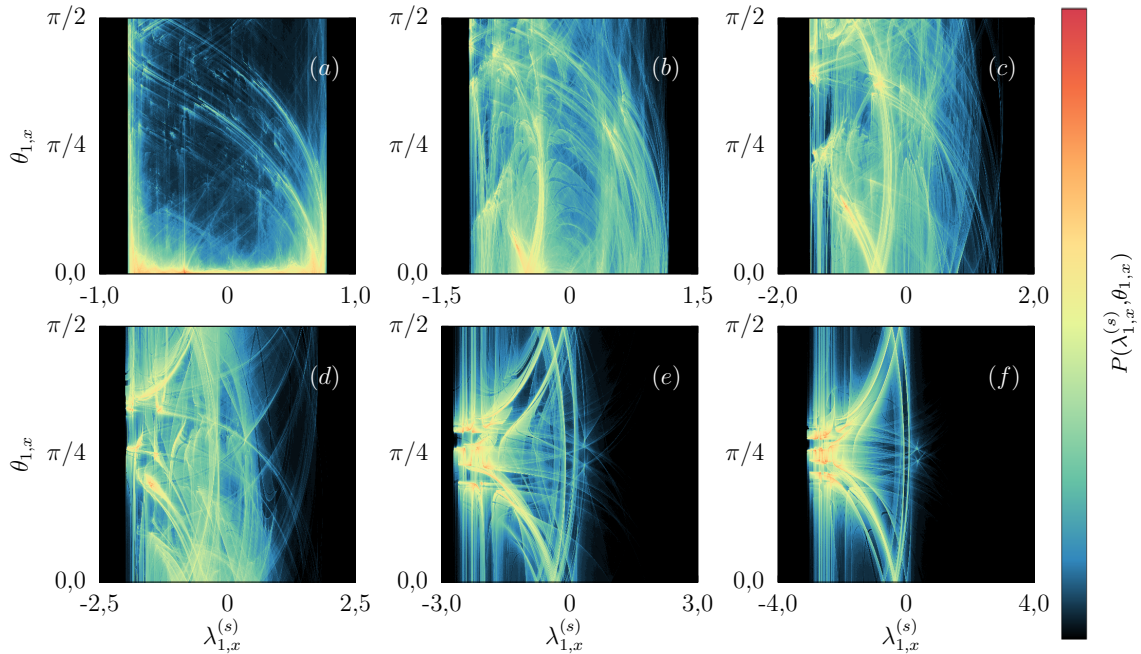


Figura 22 – Distribuição de probabilidade conjunta entre o expoente de Lyapunov local estável e o ângulo local em função do parâmetro  $k$ ; (a)  $k = 0,60$ , (b)  $k = 1,50$ , (c)  $2,50$ , (d)  $4,50$ , (e)  $k = 10,0$ , (f)  $k = 12,69$ . As distribuições são normalizadas.

Para todo  $k$ , a maior probabilidade de ter ângulo local próximo a zero acontece para valores da diferença dos FTLEs próximos de zero. Aumentando  $k$  é mais provável encontrar pontos com ângulo próximo a  $\pi/4$  é com valor de  $h_{1,x}$  grande.

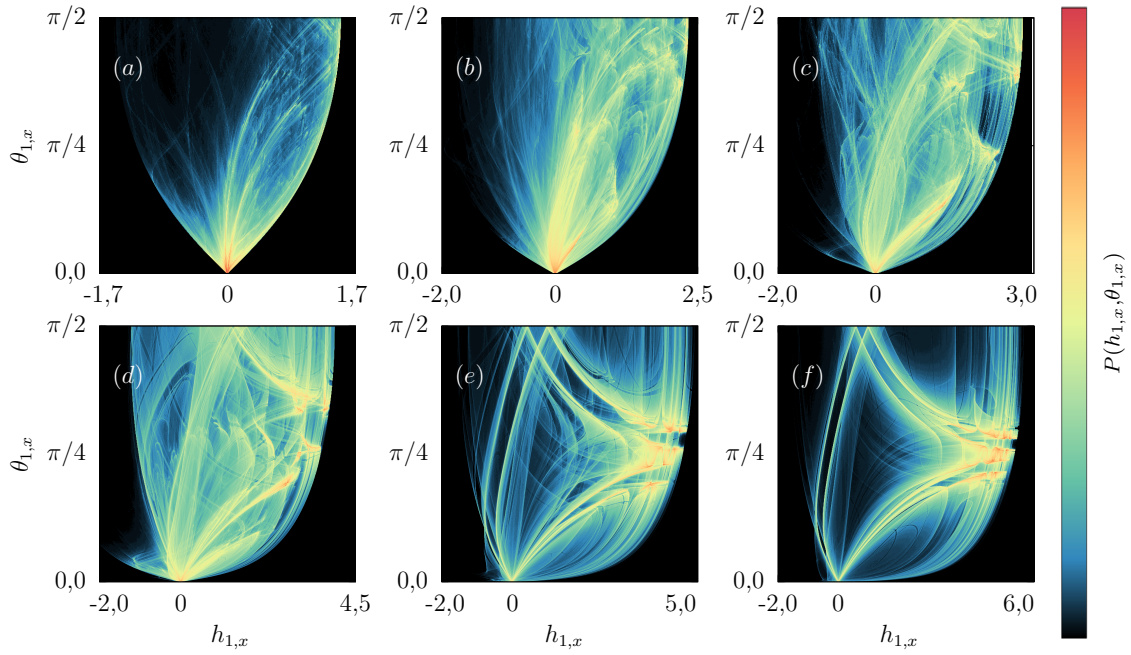


Figura 23 – Distribuição de probabilidade conjunta entre a diferença dos FTLEs local e o ângulo local em função do parâmetro  $k$ ; (a)  $k = 0,60$ , (b)  $k = 1,50$ , (c)  $2,50$ , (d)  $4,50$ , (e)  $k = 10,0$ , (f)  $k = 12,69$ . As distribuições são normalizadas.

É interessante observar que para valores pequenos de  $k$  a distribuição é quase-simétrica ao redor de  $(0,0)$ . Enquanto  $k$  aumenta, a probabilidade de valores negativos de  $h_{1,x}$  diminui, e se acumula para valores positivos. Em outras palavras, para valores pequenos de  $k$  não existe uma direção preferencial dos subespaços de Oseledec para expandir ou contrair, enquanto para  $k$  grandes, é mais provável que localmente o subespaço local instável expanda mais rápido que o subespaço local estável, isto pode ser observado nas Figs. (21) e (22).

---

## 5. Hierarquia de aprisionamento dinâmico

---

Em sistemas hamiltonianos com espaço de fase misto, as propriedades dinâmicas tornam-se muito complicadas, em particular, o efeito de aprisionamento dinâmico é um confinamento temporário de órbitas em uma região particular do espaço de fase por um tempo arbitrário antes de se difundir para uma região maior [14, 15, 22, 23, 40, 41, 43, 46–48]. Os primeiros trabalhos nos quais observou-se o efeito de aprisionamento dinâmico datam dos anos setenta [36–41].

Neste capítulo, estudamos numericamente o efeito de aprisionamento dinâmico para dois sistemas hamiltonianos de baixa dimensão, o mapa padrão como sistema discreto e como sistema contínuo o fluxo de Hénon-Heiles. Neste estudo usamos as propriedades da decomposição de Oseledec. Primeiramente, daremos uma breve introdução dos mecanismos que geram o efeito de aprisionamento dinâmico em sistemas conservativos de baixa dimensão, assim como os observáveis que são utilizados para o seu estudo e caracterização. Depois apresentaremos breves resultados de aprisionamento dinâmico no sistema de Hénon-Heiles. Na segunda parte um estudo mais extenso é apresentado para o mapa padrão.

### 5.1 Aprisionamento dinâmico em sistemas conservativos

Para um sistema conservativo 2-dimensional, existem várias explicações fenomenológicas para descrever o efeito de aprisionamento dinâmico, vamos mencionar alguns deles.

- (i) **Cantori em torno de ilhas de regularidade.** G. Contopolulos e M. Harsoula descrevem bem o fenômeno de aprisionamento dinâmico em torno de ilhas de regularidade, o qual é devido ao aparecimento de cantori, pontos de conjuntos de Cantor formando barreiras dinâmicas [13]. Esses conjuntos são formados pela destruição de curvas invariantes ao redor da ilha. Segue em detalhes a descrição destes autores:

“Quando a curva invariante mais externa (última curva KAM) ao redor da ilha é destruída, à medida que a perturbação aumenta, ela forma um *cantorus*, que tem uma infinidade de lacunas através das quais as órbitas de dentro do cantorus podem sair. Um pouco antes da formação do cantorus, uma camada caótica é formada no lado interno da última curva KAM. No entanto, a última curva KAM não permite nenhuma comunicação entre esta camada caótica e o mar caótico externo. Logo após a formação do cantorus, as lacunas do cantorus são pequenas, portanto, uma



órbita caótica dentro do cantorus demora muito antes de escapar para o mar caótico externo, e um efeito de aprisionamento dinâmico aparece. Conforme a perturbação aumenta, as lacunas tornam-se maiores e o efeito de aprisionamento dinâmico inicial dura por um tempo menor” [15].

- (ii) **Camadas limites (boundary layer)** [105, 106] “Ilhas imersas na área de movimento caótico correspondem a algumas ressonâncias entre o movimento não perturbado e as perturbações. Conforme o parâmetro de perturbação muda, a topologia das ilhas também muda e diferentes bifurcações seguem uma após a outra. Se temos uma ilha com um ponto elíptico embutido no mar caótico, após uma alteração do parâmetro não linear, uma bifurcação aparece, criando dois pontos elípticos e hiperbólicos adicionais. As separatrizes são destruídas (divididas) pela perturbação e são substituídas por uma camada caótica exponencialmente estreita. Conforme continuamos a alterar o parâmetro não linear, a largura da camada caótica se torna maior. A camada caótica é separada do mar caótico, por uma pequena mudança do parâmetro não linear, podemos alcançar uma fusão da camada caótica com o mar caótico. Uma área de interseção da fusão pode ser arbitrariamente pequena, portanto, a probabilidade de cruzar a fronteira pode ser arbitrariamente pequena. O domínio da camada caótica anterior é uma armadilha, e uma trajetória que entra na armadilha pode passar um tempo astronômico lá” [46].
- (iii) **Hierarquia autos-semelhante de ilhas.** Introduzidas e descritas por Zaslavsky e colaboradores [24, 46, 106, 107]: “Devido ao teorema de Poincare-Birkhoff, na vizinhança de uma órbita periódica genérica existem órbitas elípticas de tamanhos menores, cada uma das quais, por sua vez, tem órbitas elípticas na sua vizinhança e assim por diante. Estas órbitas elípticas são ordenadas formando uma cadeia de ilhas ao redor das ilhas. Para valores específicos de  $k$ , a cadeia de ilhas pode assumir um caráter autos-semelhante” [106]
- (iv) **Curvas assintóticas instáveis.** Muitas órbitas fora de curvas assintóticas instáveis se aproximam a estas e seguem caminhos muito semelhantes. Assim, essas curvas assintóticas aparecem mais obscurecidas entre a totalidade das órbitas no domínio caótico e produzem o efeito de aprisionamento dinâmico [15].

## 5.2 Caracterização de aprisionamento dinâmico

A análise e caracterização de aprisionamento dinâmico têm sido objeto de intensa investigação ao longo de muitos anos, usando-se várias observações [14]. Tempos de escape de uma determinada região no espaço de fase [15, 17], FTLEs [18–26], hiperbolicidade e ângulos entre subespaços [27–29], gráficos de recorrências [30], estatísticas das recorrências [31–33], número de rotação [34] e análise das estruturas de componentes caóticos [14, 35].

Estamos interessados em estudar o efeito de aprisionamento dinâmico através da decomposição de Oseledec, porém, estudos têm sido feitos usando as distribuições dos FTLEs instáveis. A seguir apresentamos resultados relevantes destes estudos, bem como as referências relacionadas.

### 5.2.1 Hierarquia de aprisionamento dinâmico e as distribuições dos FTLEs

Para caracterizar o movimento em camadas caóticas, as distribuições dos FTLEs são usadas. Foi demonstrado que os FTLEs próximos às ilhas em diferentes níveis hierárquicos são diferentes. Quanto mais alto o nível hierárquico da ilha, mais próximo de zero o máximo FTLE [24].

Em [25, 26] foi mostrado que a distribuição dos FTLEs em mapas conservativos depende do número de níveis hierárquicos de ilhas visitadas pela trajetória durante o movimento nas camadas caóticas. “A distribuição de expoentes de Lyapunov a tempo finito é uma sobreposição de diferentes distribuições dos FTLEs, cada uma delas correspondendo a um nível hierárquico de ilhas. Na verdade, a distribuição não é apenas bimodal, mas tem tantos máximos quanto o número de níveis visitados na hierarquia. Uma vez que esses máximos estão localizados cada vez mais perto de zero conforme o número do nível aumenta, não se pode distinguir entre todos esses máximos e a distribuição aparece como uma distribuição bimodal, representando principalmente a sobreposição das funções de distribuição dos dois primeiros níveis na hierarquia” [26].

## 5.3 Aprisionamento dinâmico no sistema Hénon-Heiles

Nesta seção abordaremos o efeito de aprisionamento dinâmico no sistema de Hénon-Heiles, um sistema contínuo quadridimensional no espaço de fase.

Na Fig. 24, para uma energia  $E_c$  e para três janelas temporais, são mostradas séries temporais dos FTLEs ao longo de um pedaço de trajetória (no lado esquerdo). No painel (a) são exibidas as séries temporais dos FTLEs para um tempo  $\Delta\tau = 0,01$ , de cor vermelho  $\lambda_{\Delta\tau,x}^{(u)}$ , de cor preto  $\lambda_{\Delta\tau,x}^{(c)}$  e de cor azul  $\lambda_{\Delta\tau,x}^{(s)}$ . Observamos que inversões de ordem são muito prováveis, para os mesmo pontos. No painel (b) são exibidos os FTLEs para um tempo  $\tau = 25$  e em (c) para  $\tau = 1000$ . Vemos que aumentando a janela temporal a probabilidade de inversão de ordem diminui, porem ainda existe.

No lado direito da Fig. 24, as distribuições dos ângulos médios na região caótica são exibidas, com as mesmas janelas temporais,  $\tau = 0,01, 25, 100$ . Aumentando a janela temporal as distribuições vão se aproximando a gaussianas com deslocamento para a esquerda, ver Fig. 12.(f), características devidas ao efeito de aprisionamento dinâmico.

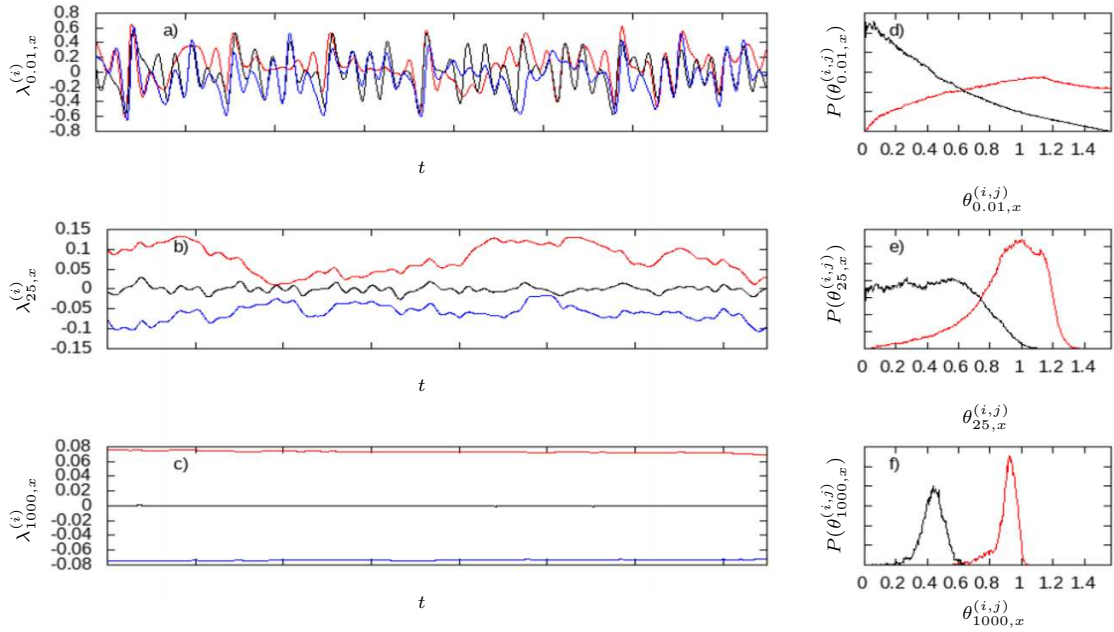


Figura 24 – Para uma energia  $E_c$  e três janelas temporais (a),(d)  $\tau = 0,01$ , (b),(e)  $\tau = 25$  e (c),(f)  $\tau = 1000$ . Série temporal dos FTLEs ao longo de uma trajetória (lado esquerdo), em cor vermelha correspondem ao subespaço instável, em cor preta ao subespaço central e em cor azul ao subespaço estável. Distribuições dos ângulos médios considerando toda a região  $\Lambda$  (lado direito), em cor vermelha corresponde ao ângulo  $\Theta_{0,01,x}$  e em cor preta ao ângulo  $\Omega_{0,01,x}$ .

A seguir mostramos que, tanto para sistemas contínuos como discretos, as distribuições de probabilidade dos FTLEs instáveis tem comportamentos multimodais devido às camadas caóticas em torno de ilhas de regularidade. Para isto, na Fig. 25 são exibidas as distribuições de probabilidade de  $\lambda_{\tau,x}^{(u)}$  em função das janelas temporais  $\tau = 25, 50, 75, 150, 200, 250, 300, 400, 500, 750$  e para dois valores de energia. As condições iniciais foram escolhidas uniforme e aleatoriamente na superfície de energia, consideramos que uma trajetória é caótica se o maior expoente de Lyapunov é maior que 0,05 para um tempo de  $t = 10000$ . O painel (a-b) mostra os resultados para  $E = 0,85E_c$  e em (c-d) para  $E = E_c$ . Vemos que em ambos os casos, as distribuições são multimodais (não precisamente de camadas caóticas), tanto isoladas, ou com superposição. Vemos que aumentando  $\tau$  as modas vão sendo isoladas, porém, para uma energia maior, estas modas isoladas aparecem mais rápido.

Para ter uma ideia das regiões que podem gerar as modas isoladas nas distribuições de probabilidade, plotamos na seção de Poincaré valores dos FTLEs em torno dos máximos destas modas, os limites entre as modas foram escolhidos aleatoriamente. Para uma energia  $E_c$ , na Fig. 26 são plotadas as distribuições para duas janelas  $\tau = 250$  (painéis esquerdos) e  $\tau = 1000$  (painéis direitos). Os painéis (1a)-(2a) mostram a distribuição completa, nestes casos podemos observar três modas, sendo mais pronunciados para um tempo  $\tau = 1000$ . Separamos a distribuição em três intervalos mostrados de cor preta, azul e vermelho. Cada



intervalo está associado a uma moda. Nos painéis (1b)-(2b) são mostrados uma ampliação das modas menores. Nos painéis (1c)-(2c) são mostrados os valores de  $\lambda_{\tau,x}^{(u)}$  na seção de Poincaré. A menor moda, dentro do intervalo dos menores valores de  $\lambda_{\tau,x}^{(u)}$  está associado a região mais próxima em torno das ilhas de regularidade, enquanto a moda maior, de cor vermelha, encontra-se na maior parte da seção.

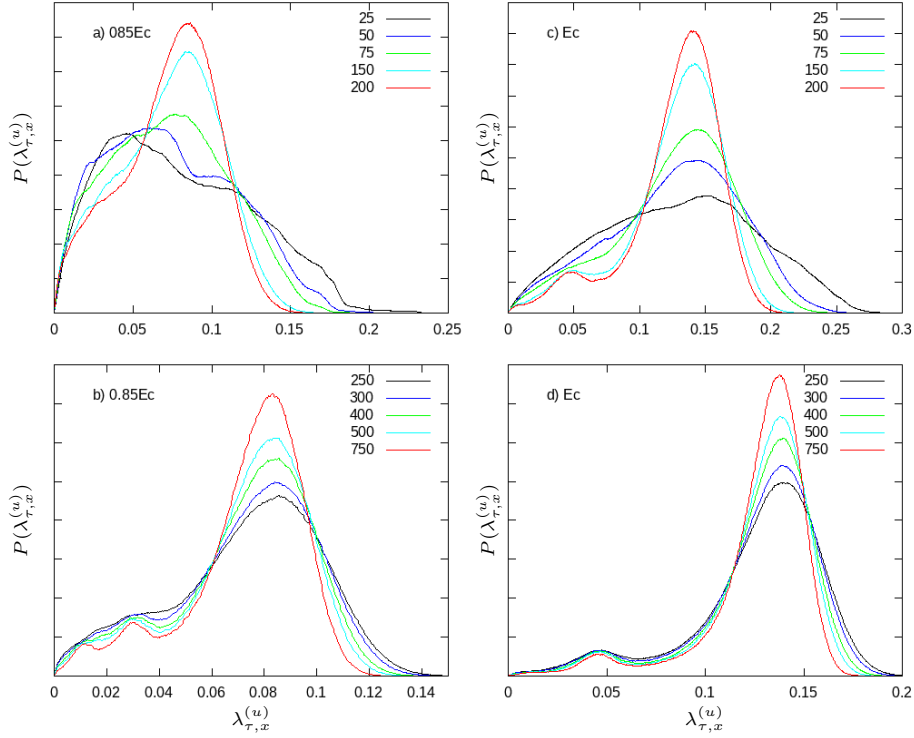


Figura 25 – Distribuições de probabilidade dos FTLEs instável em função da janela temporal  $\tau$ . (a,b) Energia  $E = 0,85E_c$  e (c,d)  $E_c$ . Os FTLEs foram cômputados ao longo de cerca de 5000 trajetórias de longitude  $t = 10000$ .

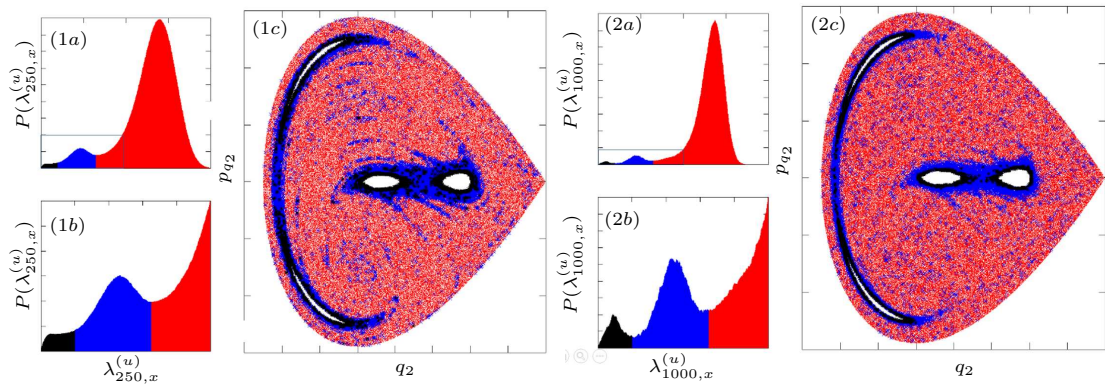


Figura 26 – Geometria dos FTLEs instáveis na seção Poincaré associadas as modas nas distribuições. Vemos que camadas caóticas em torno das ilhas de regularidade, podem ser associadas às modas nas distribuições. Regiões em torno de curvas assintóticas instáveis podem ser observadas de cor azul no painel (1c), as quais diminuíam aumentado o valor de  $\tau$ .

## 5.4 Aprisionamento dinâmico no mapa padrão

Continuando nosso estudo numérico com o mapa padrão e seguindo a linha de caracterizar o efeito de aprisionamento dinâmico através de distribuições da decomposição de Oseledec, nós focaremos na análise das distribuições da diferença entre os FTLEs,  $h_{\tau,x}$  e dos ângulos médios,  $\theta_{\tau,x}$ . Identificaremos diferentes regiões no espaço de fase que podem apresentar o efeito de aprisionamento dinâmico a diferentes escalas temporais.

Nesta seção mostramos que as distribuições de  $h_{\tau,x}$ , e dos ângulos médios,  $\theta_{\tau,x}$ , também podem ser usados para caracterizar o efeito de aprisionamento dinâmico. As distribuições mostram ser multimodais de forma análoga às distribuições dos FTLEs.

Novamente, denotemos por  $\Lambda$  a região caótica principal no espaço de fase. Para um valor do parâmetro não linear  $k = 2.5$ , a Fig. 27 exibe distribuições de probabilidade típicas na presença de aprisionamento dinâmico. Nos painéis 27(a)-27(c) são mostradas as distribuições para o FTLE instável,  $\lambda_{\tau,x}^{(u)}$ , com  $\tau = 10^1$ - $10^3$ , respectivamente. Modas nas distribuições podem ser observados para  $\tau$  menores, parecendo ser bimodal para  $\tau$  maiores.

Nas Figs. 27(d)-27(f) são exibidas as distribuições de  $h_{\tau,x}$  para  $\tau = 10^1$ - $10^3$ , podemos observar um formato similar que as distribuições dos FTLEs instável, mostram ser multimodais dependentes de  $\tau$ . Nas Figs. 27(d)-27(f) as distribuições dos ângulos médios,  $\theta_{\tau,x}$ , mostram ser mais gaussianas, porém, têm deslocamentos para a esquerda, características devidas ao efeito de aprisionamento dinâmico. Como veremos mais adiante, as distribuições dos ângulos também são multimodais.

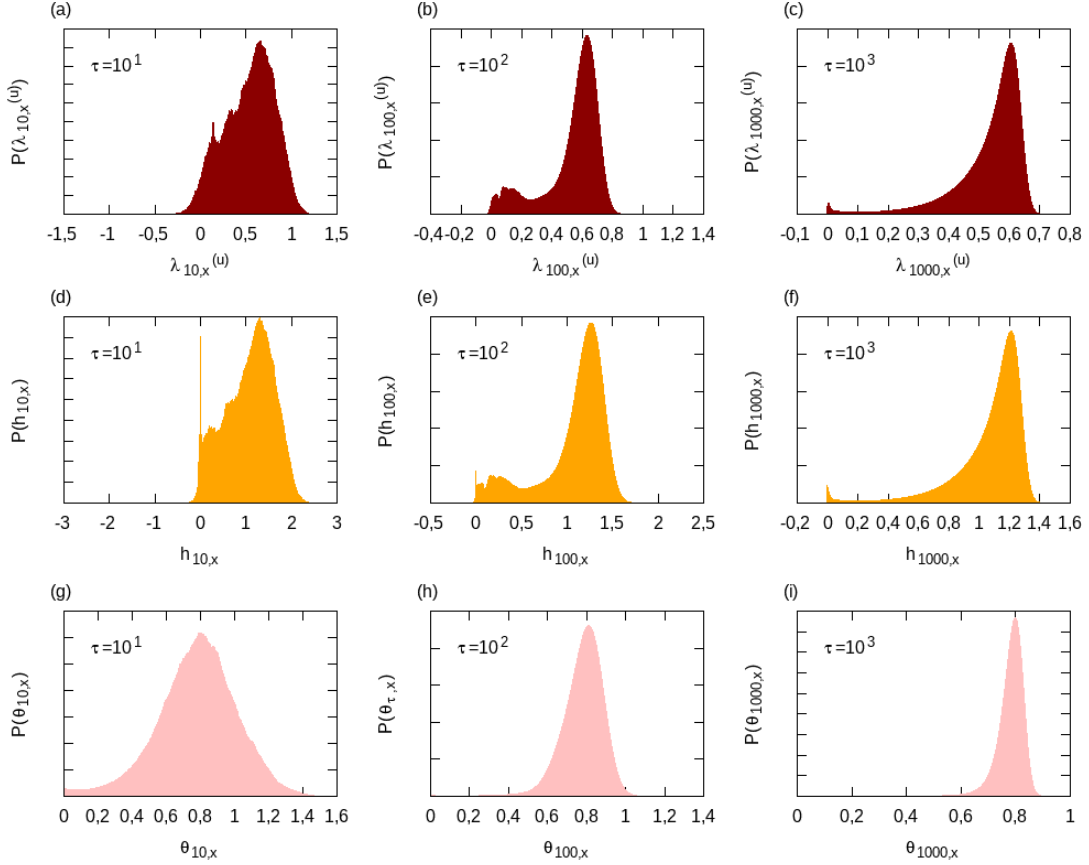


Figura 27 – Distribuições de probabilidade típicas na detecção de aprisionamento dinâmico. Região caótica principal,  $\Lambda$ , para  $k = 2,5$ , usando: (a-c) FTLEs instável,  $\lambda_{\tau,x}^{(u)}$ , (d-f) a diferença dos FTLEs,  $h_{\tau,x}$ , e (g-i) ângulo médio  $\theta_{\tau,x}$ .

As distribuições de  $\lambda_{\tau,x}^{(u)}$  e  $h_{\tau,x}$  contêm a mesma informação para valores grandes de  $\tau$ , porém, as diferenças para valores pequenos são relevantes, pelo que uma análise mais detalhada será feita em outro trabalhos. Da Fig. 20 no capítulo 4, vemos que os FTLEs estáveis e instáveis são menos correlacionadas para valores pequenos de  $k$ , do que para valores maiores, pelo que maiores diferenças nas distribuições são esperadas tanto para  $\tau$  pequenos, como para valores de não linearidade pequenos, isto devido ao espaço de fase ser mista.

A geometria no espaço de fase de  $\lambda_{\tau,x}^{(u)}$ ,  $h_{\tau,x}$  e  $\theta_{\tau,x}$  são mostradas nas Figs. 28(a)-28(c), respectivamente. Foi escolhido um valor de  $k = 0,90$  como parâmetro não linear e  $\tau = 100$  para a janela temporal. É mostrado que  $h_{100,x}$  e  $\theta_{100,x}$  próximos às ilhas variam para diferentes níveis hierárquicos. Quanto mais alto o nível hierárquico na ilha, os valores ficam em média mais próximo de zero. Assim como também, valores maiores desta quantidades podem ser observadas em torno de curvas assintóticas instáveis, cor vermelha.

Portanto, as quantidades  $h_{\tau,x}$  e  $\theta_{\tau,x}$  podem ser usados para detectar e visualizar a hierarquia de aprisionamento dinâmico. Nós usaremos somente os valores de  $h_{\tau,x}$  e  $\theta_{\tau,x}$  em nosso estudo do efeito de aprisionamento dinâmico. No caso do mapa padrão,

aprisionamento dinâmico em caos local e caos global será estudado.

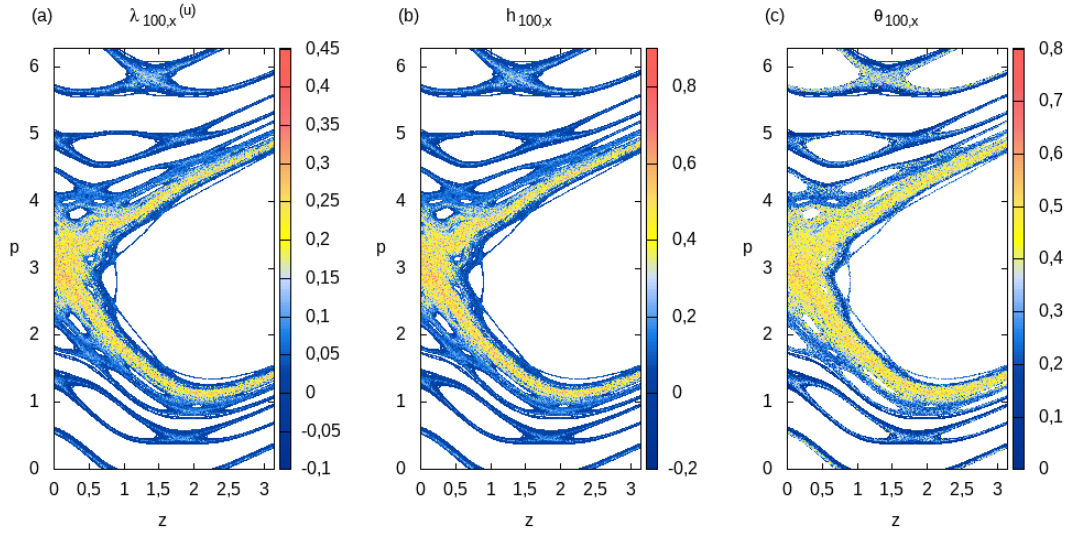


Figura 28 – Geometria no espaço de fase para  $k = 0,90$ . (a) FTLEs instável,  $\lambda_{\tau,x}^{(u)}$ , (b) a diferença dos FTLEs,  $h_{\tau,x}$ , e (c) ângulo médio  $\theta_{\tau,x}$ .

## 5.5 Aprisionamento dinâmico em caos global

Nesta seção vamos focar nosso estudo no efeito de aprisionamento dinâmico em caos global, onde  $k > k_c$ . As distribuições de  $h_{\tau,x}$  e  $\theta_{\tau,x}$  serão analisadas em função da janela temporal  $\tau$ . Foi escolhido  $k = 2,5$  como valor do parâmetro não linear. Dado que estamos olhando como mudam as distribuições com  $\tau$ , os valores da probabilidade não serão exibidos, porém, as distribuições são normalizadas em todos os casos.

As distribuições de probabilidade de  $h_{\tau,x}$  são exibidas na Fig. 29 em função do tempo, (a-h)  $\tau = 10^0$ - $10^7$ , respectivamente; na Fig 30(a)-30(h) a geometria no espaço de fase de  $h_{\tau,x}$  associada aos mesmo valores das janelas temporais que na Fig. 29.

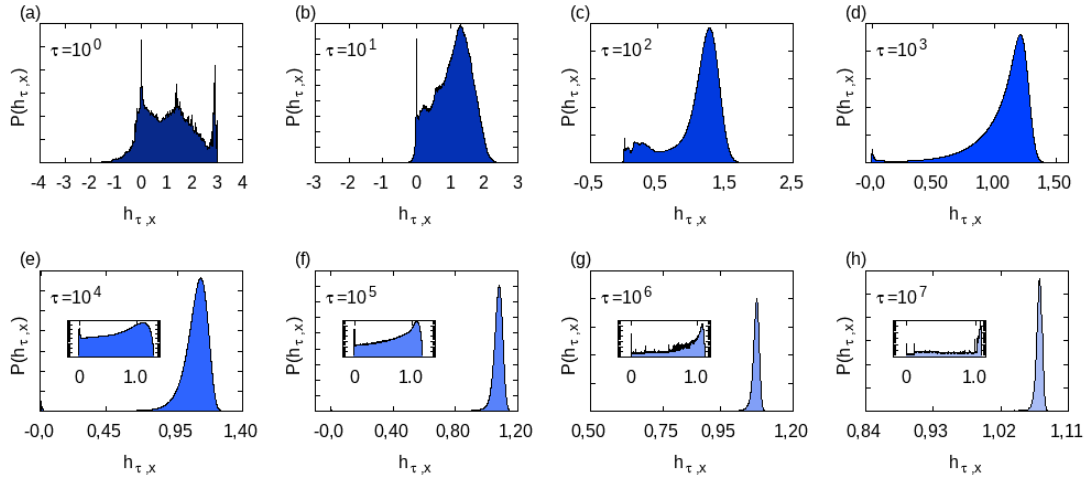


Figura 29 – Distribuições de probabilidade para a detecção de aprisionamento dinâmico na região  $\Lambda$  para  $k = 2,50$  com a diferença dos FTLEs,  $h_{\tau,x}$ , (a-h)  $\tau = 10^0$ - $10^7$ , respectivamente.

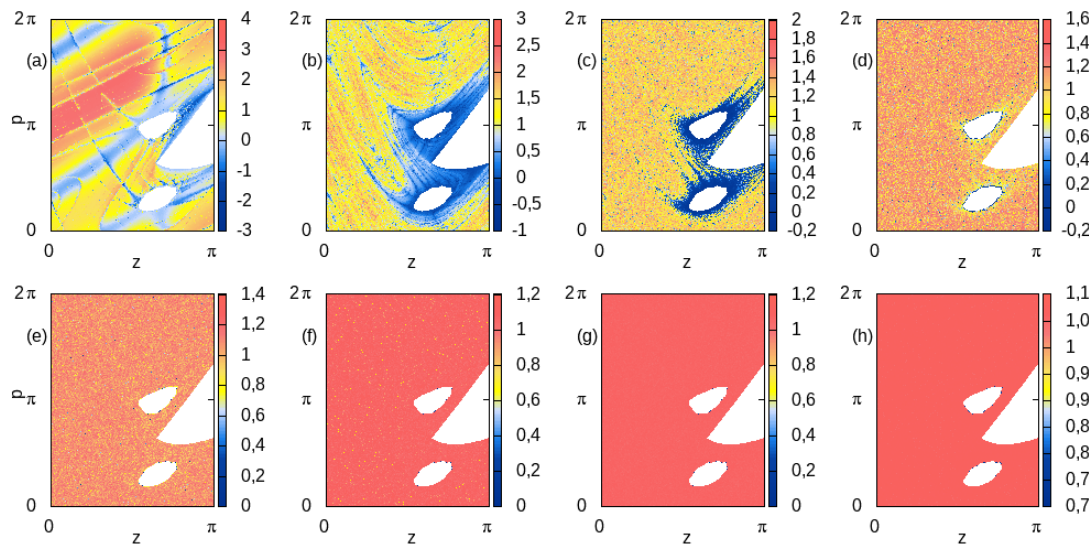


Figura 30 – Geometria no espaço de fase da diferença dos FTLEs,  $h_{\tau,x}$ , para a visualização de hierarquias de aprisionamento dinâmico em caos global com  $k = 2,50$ . (a-h)  $\tau = 10^0$ - $10^7$ , respectivamente.

A distribuição 29(a) tem um formato mais complexo, observando picos em todo o intervalo de  $h_{\tau,x}$ . Um dos picos maiores encontra-se ao redor de  $h_{\tau,x} = 3$  associado a regiões mais hiperbólicas de cor vermelho na Fig. 30(a); outro pico pode ser observado ao redor de zero associado a regiões de cor azul na Fig. 30(a), estas regiões são localizadas em torno das ilhas de regularidade e ao redor de região hiperbólica. Para  $\tau = 10^1$  continuamos vendo uma probabilidade grande para valores menores e próximos de zero, diminuindo ao aumentar a janela temporal  $\tau$ .

Aumentando a janela temporal, uma moda principal para valores grandes de  $h_{\tau,x}$  pode ser rapidamente observado, localizando-se a maior probabilidade ao redor deste, ver Figs. 29(b)-29(h). Para valores  $10^1 \leq \tau \leq 10^3$  as regiões afastadas das ilhas são associadas

à moda principal, além disso, para  $\tau$  grandes a região associada à moda principal abrange quase todo o espaço de fase, exceto para pontos muito próximos de zero. Como foi visto no capítulo anterior, as regiões associadas à moda principal correspondem às regiões mais hiperbólicas.

Para tempos médios  $10^1 \leq \tau \leq 10^3$  (Figs. 29(b)-29(d)) podemos observar superposições de modas no lado esquerdo das distribuições, porém, nas Figs. 30(b)-30(d) as regiões associadas a essas modas são difusas entre si. Para valores grandes de  $\tau$  a distribuição parece bimodal, porém valores próximos de zero podem ser observados, cuja probabilidade vai para zero à medida que  $\tau$  aumenta.

As distribuições de probabilidade dos ângulos médios,  $\theta_{\tau,x}$ , são exibidas na Fig. 31 em função do tempo: Figs 31(a)-31(h)  $\tau = 10^0$ - $10^7$ ; na Figs. 32(a)-32(h) a geometria no espaço de fase de  $\theta_{\tau,x}$  associada para os mesmo valores das janelas temporais que na Fig. 31.

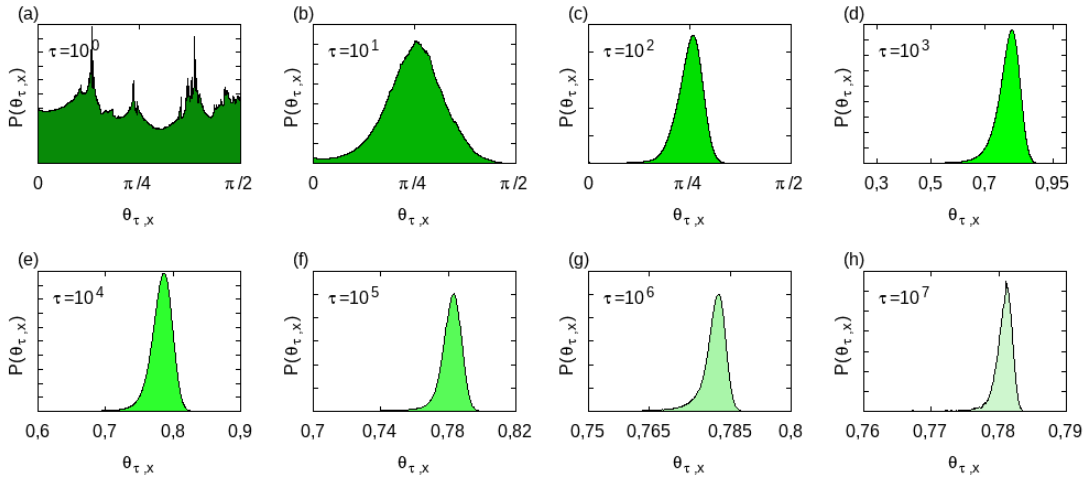


Figura 31 – Distribuições de probabilidade para a detecção de aprisionamento dinâmico na região  $\Lambda$  para  $k = 2,50$  com os ângulos médios,  $\theta_{\tau,x}$ , (a-h)  $\tau = 10^0$ - $10^7$ , respectivamente.

Como no caso da diferença dos FTLEs, a distribuição 31(a) tem um formato mais complexo, observando picos em todo o intervalo de  $\theta_{\tau,x}$ . Na figura 32(a) vemos que em média valores maiores dos ângulos estão associados a regiões mais hiperbólicas. Em torno de ilhas, os valores do ângulo são menores (em média), porém, qualquer valor de ângulo podem ser encontrados em toda a região  $\Lambda$ . É interessante observar que valores médios de  $\tau$ , Figs 30(b)-30(c) e 32(b)-32(c), os valores  $h_{\tau,x}$  e  $\theta_{\tau,x}$  em torno de curvas assintóticas instáveis dentro de uma mesma camada caótica, são menores se estas estão mais próximas das ilhas de regularidades, respetivamente.

As distribuições viram mono-modais rapidamente ao aumentar a janela temporal, ver Figs. 32(b)-32(h), ficando deslocadas para o lado esquerdo, diminuindo rapidamente a probabilidade de ter ângulos médios próximos de zero ou próximos de  $\pi/2$ .



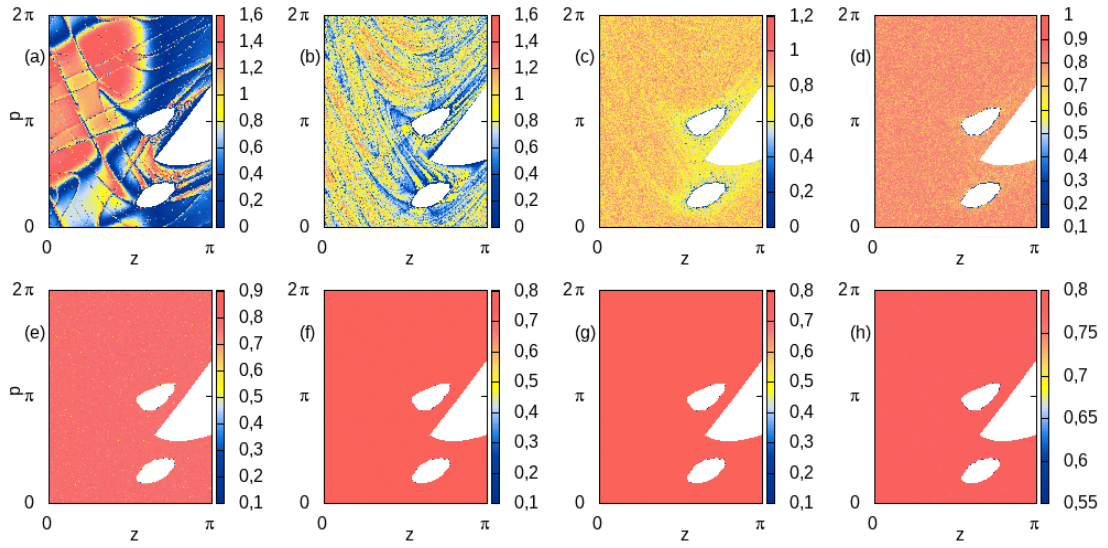


Figura 32 – Geometria no espaço de fase dos ângulos médios,  $\theta_{\tau,x}$ , para a visualização de hierarquias de aprisionamento dinâmico em caos global com  $k = 2,50$ . (a-h)  $\tau = 10^0$ - $10^7$ , respectivamente.

Na Fig. 32(b) podemos observar estruturas similares às curvas assintóticas, tanto para os maiores valores dos ângulos (cor vermelho) como para os valores menores dos ângulos (cor azul). As estruturas feitas pelos valores menores dos ângulos em cor azul, parecem sair/entrar nas ilhas de regularidade. A hierarquia de aprisionamento dinâmico em torno de ilhas é melhor observada nas Figs. 32(c)-32(d), com  $\tau = 10^2$  e  $\tau = 10^3$ . Para valores maiores de  $\tau$  não observamos efeito de aprisionamento dinâmico para quase toda a região  $\Lambda$ . Porém, o fato que os menores valores dos ângulos encontram-se em torno das ilhas, sugerem que a hierarquia pode ser observada se restringimos o nosso estudo nestas regiões.

## 5.6 Aprisionamento dinâmico em caos local

Continuamos o nosso estudo de aprisionamento dinâmico em caos local, ( $k < k_c$ ), onde temos regiões caóticas desconectadas. Nós escolhemos um valor de  $k = 0,90$  como parâmetro não linear. Neste caso, dividiremos novamente o estudo. Nesta seção estudaremos as distribuições da região  $\Lambda$ , sendo esta a união de várias regiões desconectadas. Na seção 5.7 serão estudadas as distribuições para cada região de forma independente.

Calculamos a distribuição total de  $h_{\tau,x}$  e dos ângulos médios na região  $\Lambda$ , composta pela união das quatro regiões desconectadas mostradas em cor cinza na Fig. 33, cada uma das regiões será denotada por  $\Lambda^{(1)}$ - $\Lambda^{(4)}$ , assim,  $\Lambda = \Lambda^{(1)} \cup \Lambda^{(2)} \cup \Lambda^{(3)} \cup \Lambda^{(4)}$ . Uma análise da geometria de  $h_{\tau,x}$  e  $\theta_{\tau,x}$  é feita  $\Lambda$  em paralelo com as distribuições.

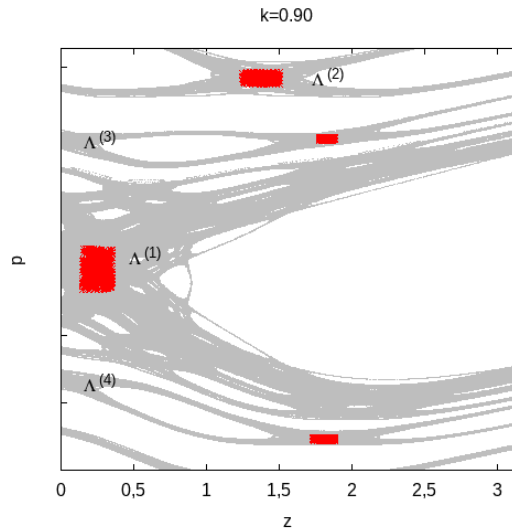


Figura 33 – Região  $\Lambda = \Lambda^{(1)} \cup \Lambda^{(2)} \cup \Lambda^{(3)} \cup \Lambda^{(4)}$  no espaço de fase. Em cor vermelha são mostradas as 250 condições iniciais usadas em cada região.

As distribuições de probabilidade de  $h_{\tau,x}$  são exibidas na fig. 34(a)-34(h) em função da janela temporal  $\tau = 10^0$ - $10^7$ , respectivamente, assim como as geometrias no espaço de fase de  $h_{\tau,x}$ , para os mesmo valores das janelas temporais, são exibidas na Fig. 35.

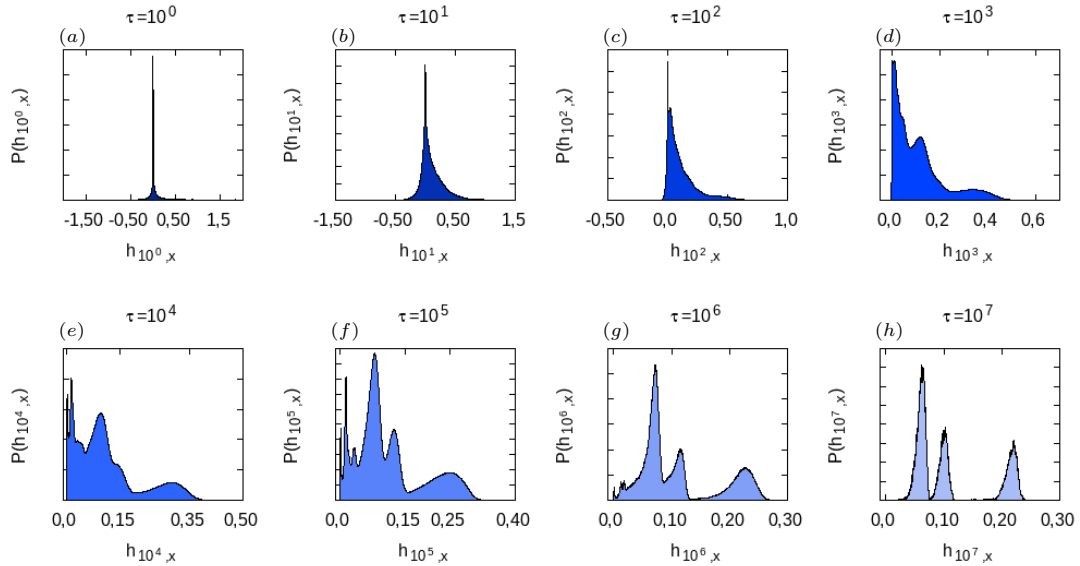


Figura 34 – Distribuições de probabilidade para a detecção de aprisionamento dinâmico na região  $\Lambda$  para  $k = 0,90$  com a diferença dos FTLEs,  $h_{\tau,x}$ , (a-h)  $\tau = 10^0$ - $10^7$ , respectivamente.

Comparando a quantidade de valores grandes de  $h_{\tau,x}$  em cada uma das regiões, observamos que as regiões com maior área contêm os máximos valores absolutos de  $h_{\tau,x}$ , sendo a região  $\Lambda^{(1)}$  com maior área, então,  $\max\{|h_{\tau,x}|\} \geq \max\{|h_{\tau,y}|\}$  para  $x \in \Lambda^{(1)}$  e  $y \in \Lambda^{(2)}$ - $\Lambda^{(4)}$ .



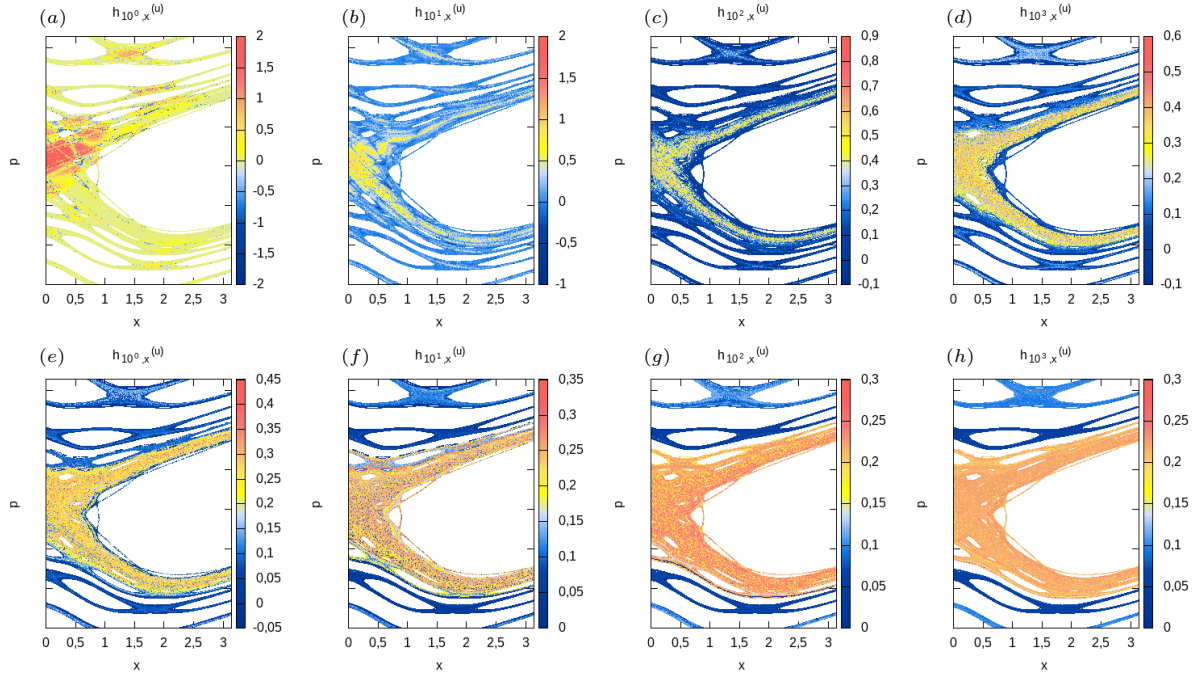


Figura 35 – Geometria no espaço de fase da diferença dos FTLEs,  $h_{\tau,x}$ , para a visualização de hierarquias de aprisionamento dinâmico em caos local com  $k = 0,90$ . (a-h)  $\tau = 10^0$ - $10^7$ , respectivamente.

A distribuição 34(a) tem um pico bem pronunciado em zero, sendo a distribuição mais *simétrica*, mas tendo um deslocamento para o lado direito. A geometria associada no espaço de fase 35(a) mostra que as regiões em torno dos pontos periódicos hiperbólicos tem os valores maiores de  $h_{\tau,x}$  (cor vermelho), enquanto a maior parte do espaço de fase tem valores próximos de zero.

Para valores de  $\tau \leq 10^3$ , a maior probabilidade continua próxima de zero, porém, ela vai aumentando para valores positivos de  $h_{\tau,x}$ . Olhando a geometria no espaço de fase 35(b)-35(c), vemos que duas regiões podem ser facilmente localizadas, a região em cor azul em torno das ilhas e as regiões mais hiperbólicas exibidas em cor amarelo. Vemos que a região vai se espalhando ao redor das ilhas, cuja estrutura segue curvas assintóticas. Na Fig. 35(b) pontos próximos a pontos periódicos hiperbólicos apresentam os maiores valores de  $h_{\tau,x}$  (cor vermelho) e de forma similar vão se espalhando ao longo da região amarela como curvas assintóticas. O intervalo dos valores de  $h_{\tau,x}$  vai diminuindo, sendo mais rápido para valores menores.

Para valores de  $\tau \geq 10^3$  vemos que as distribuições viram multimodais, ver Figs. 34(d)-34(h). Para  $\tau = 10^3$  a moda com maior probabilidade ainda encontra-se próxima de zero, a geometria correspondente 35(d) mostra novamente que os menores valores de  $h_{\tau,x}$  ficam em torno das ilhas. Para cada  $\Lambda^{(1)}$ - $\Lambda^{(4)}$ , duas regiões em cor azul com hiperbolicidade menor e outra com valores maiores, sendo de cor amarela-vermelho na região  $\Lambda^{(1)}$  (associada à maior moda na distribuição) e de azul-claro nas outras regiões

(associada à moda ao redor de  $h_{\tau,x} = 0,1$ ).

Para  $10^3 \leq \tau \leq 10^6$  as distribuições na Figs. 34(e)-34(g) apresentam mais modas, as quais são associadas a hierarquias das regiões em torno das ilhas, ver Figs. 35(e)-35(g). Vemos que as modas podem ser devidos somente a uma região, por exemplo, a maior moda em torno de  $h_{\tau,x} \approx 0,3$  na Fig.34(e) é associada a região mais hiperbólica da Fig. 35(e). Por outro lado as modas próximas de zero são uma superposição das modas associadas às regiões muito próximas de ilhas em cada uma das regiões  $\lambda^{(1)}$ - $\lambda^{(4)}$ . Aumentando a janela temporal, vemos que a probabilidade vai se acumulando em torno de três modas bem localizadas  $h_{\tau,x} \approx 0,07$ ,  $h_{\tau,x} \approx 0,1$  e  $h_{\tau,x} \approx 0,24$ .

A distribuição na Fig. 34(h) é tri-modal, cada moda deslocada para o lado esquerdo. Olhando na geometria do espaço de fase, 35(h) vemos que a moda maior em torno de  $h_{\tau,x} \approx 0,07$  esta associada às regiões  $\Lambda^{(3)}$  e  $\Lambda^{(4)}$ ; a moda em torno  $h_{\tau,x} \approx 0,1$  associada a região  $\Lambda^{(2)}$ ; e a moda em torno  $h_{\tau,x} \approx 0,23$  associada a região  $\Lambda^{(1)}$ .

Para  $k = 0,90$ , as distribuições de probabilidade dos ângulos médios,  $\theta_{\tau,x}$  são exibidas na Fig. 36(a)-36(h) em função da janela temporal  $\tau = 10^0$ - $10^7$ , respectivamente; na Figs. 37(a)-37(h) mostra-se a geometria no espaço de fase de  $\theta_{\tau,x}$  para os mesmos valores da janela temporal que na Fig. 29. Vemos que na Fig. 36(a) a maior probabilidade encontra-se muito próxima de zero devido às regiões pouco hiperbólicas, denotadas pela cor azul na Fig. 37(a). Os ângulos próximos a  $\pi/2$  são localizados nas regiões em torno de pontos periódicos hiperbólicos marcadas na cor vermelha. Isto acontece em cada uma das regiões  $\Lambda^{(1)} - \Lambda^{(4)}$ .

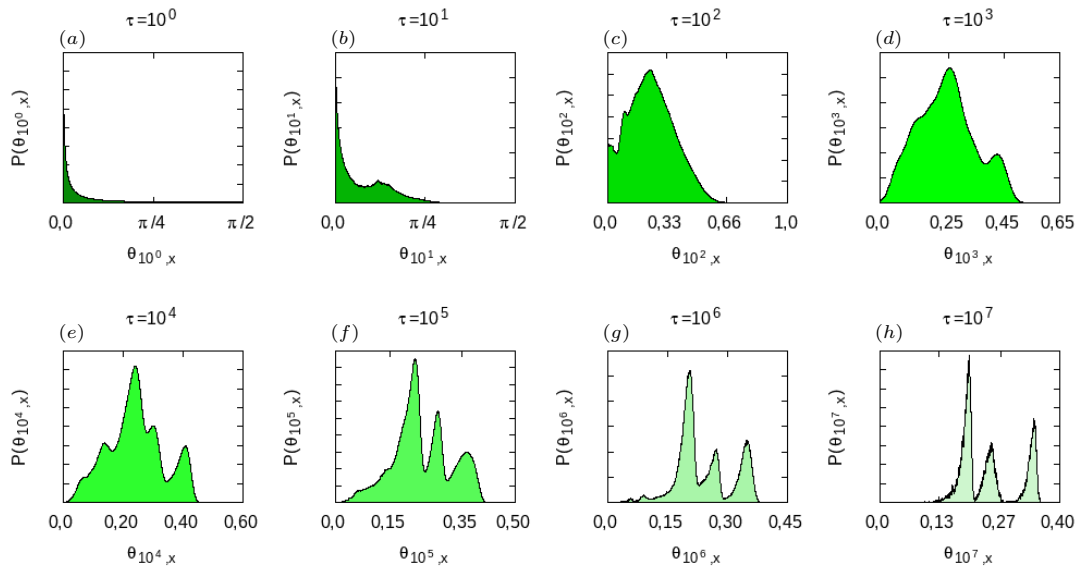


Figura 36 – Distribuições de probabilidade para a detecção de aprisionamento dinâmico na região  $\Lambda$  para  $k = 0,90$  com os ângulos médios,  $\theta_{\tau,x}$ , (a-h)  $\tau = 10^0$ - $10^7$ , respectivamente.

Para  $\tau = 10^1$  a maior probabilidade encontra-se próximo de zero, porém, a distribuição vai aumentando para valores maiores do ângulo, ver Fig. 36(b). Neste caso podemos começar a ver uma moda em torno de  $\theta_{\tau,x} \approx 0,4$ . Olhando a geometria de  $\theta_{10,x}$  no espaço de fase 37(b) vemos que a moda está associada às regiões mais hiperbólicas de cor amarela; a probabilidade de obter ângulos próximos de  $\pi/2$  vai diminuindo.

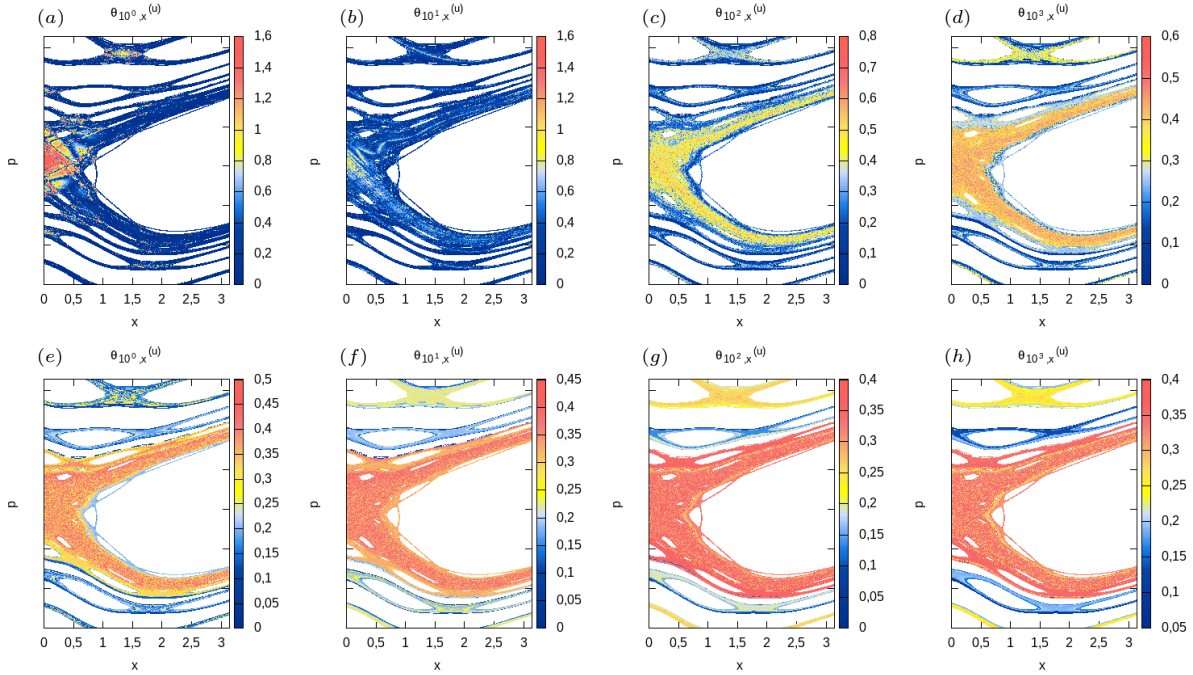


Figura 37 – Geometria no espaço de fase dos ângulos médios,  $\theta_{\tau,x}$ , para a visualização de hierarquias de aprisionamento dinâmico em caos local com  $k = 0,90$ . (a-h)  $\tau = 10^0$ - $10^7$ , respectivamente.

Temos uma probabilidade considerável de encontrar ângulos médios próximos de zero para  $\tau \approx 10^2$ , enquanto para  $\tau \geq 10^3$  esta probabilidade é quase nula, ver Figs. 36(c)-36(d). Porém, as distribuições vão se tornando cada vez mais multimodais, associadas tanto às regiões em torno de pontos hiperbólicos (valores de ângulos grandes), como à hierarquia em torno das ilhas (valores de ângulos menores). A descrição da geometria de  $\theta_{\tau,x}$ , ver Fig. 37, pode ser descrita de forma similar que a geometria de  $h_{\tau,x}$ , ver Fig. 35. No entanto, embora as distribuições vão convergindo para uma distribuição tri-modal enquanto  $\tau$  aumenta, como é mostrado nas Figs. 36(g)-36(h), vemos que hierarquias das ilhas ainda podem ser encontradas na geometria do espaço de fase em cada uma das regiões, ver Figs. 36(g)-36(h).

## 5.7 Divisão das regiões caóticas

Para descrever as modas nas distribuições de probabilidade, calculamos as distribuições da diferença dos FTLEs em cada uma das regiões  $\Lambda^{(1)}$ - $\Lambda^{(4)}$  de forma independente.

---

As Figs. 38-39 mostram os resultados para  $\tau = 10^1, 10^3, 10^5$  e  $\tau = 10^7$ ; em cada um dos painéis é mostrada a distribuição de probabilidade de  $h_{\tau,x}$  e  $\theta_{\tau,x}$  para a região total  $\Lambda$ , enquanto as distribuições em cores representam aquelas calculadas em cada uma das regiões:  $\Lambda^{(1)}$  em cor amarela,  $\Lambda^{(2)}$  em cor laranja,  $\Lambda^{(3)}$  em cor verde e  $\Lambda^{(4)}$  em cor azul. As distribuições são normalizadas de forma independente.

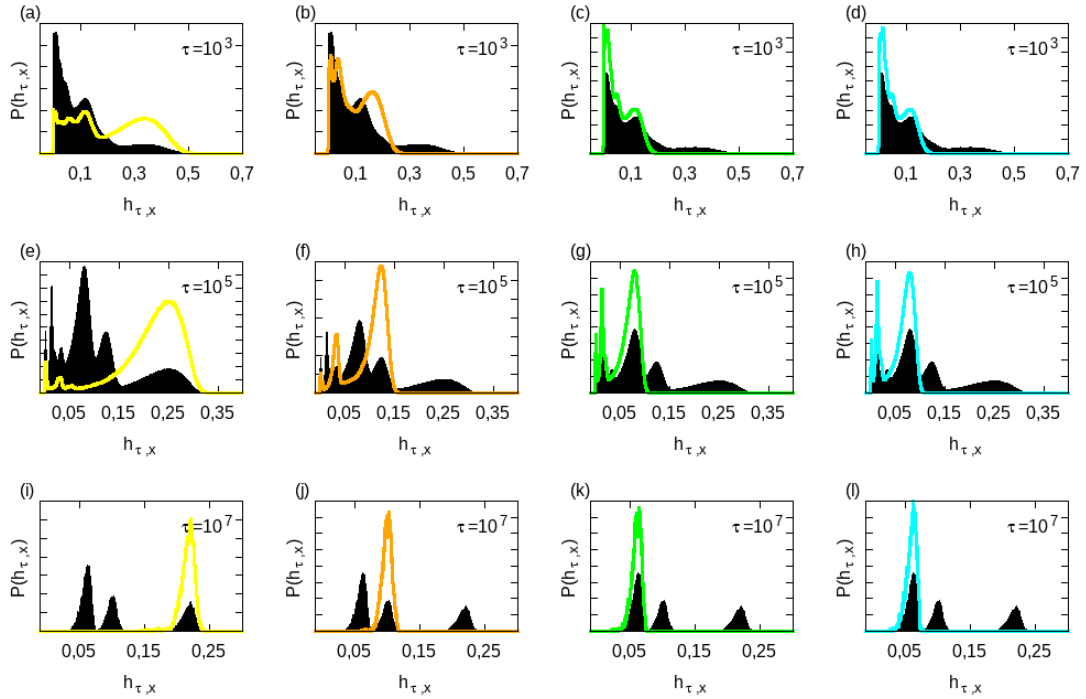


Figura 38 – Distribuições de probabilidade da diferença dos FTLEs. Para a região total,  $\Lambda$ , em cor preta e em cada uma das quatro regiões,  $\Lambda^{(1)}$ - $\Lambda^{(4)}$ , da esquerda à direita, respectivamente. Parâmetros  $k = 0,90$  e (a-d)  $\tau = 10^3$ , (e-h)  $\tau = 10^5$  e (i-l)  $\tau = 10^7$ .

Vemos que as distribuições em cada região local seguem o mesmo padrão que uma região global, camadas caóticas e curvas instáveis assintóticas podem ser associadas as modas nas distribuições e para valores grandes da janela temporal  $t$  vão se tornando unimodais. Os valores médios das distribuições variam em cada região, os quais estão correlacionados com a área ocupada no espaço de fase total.

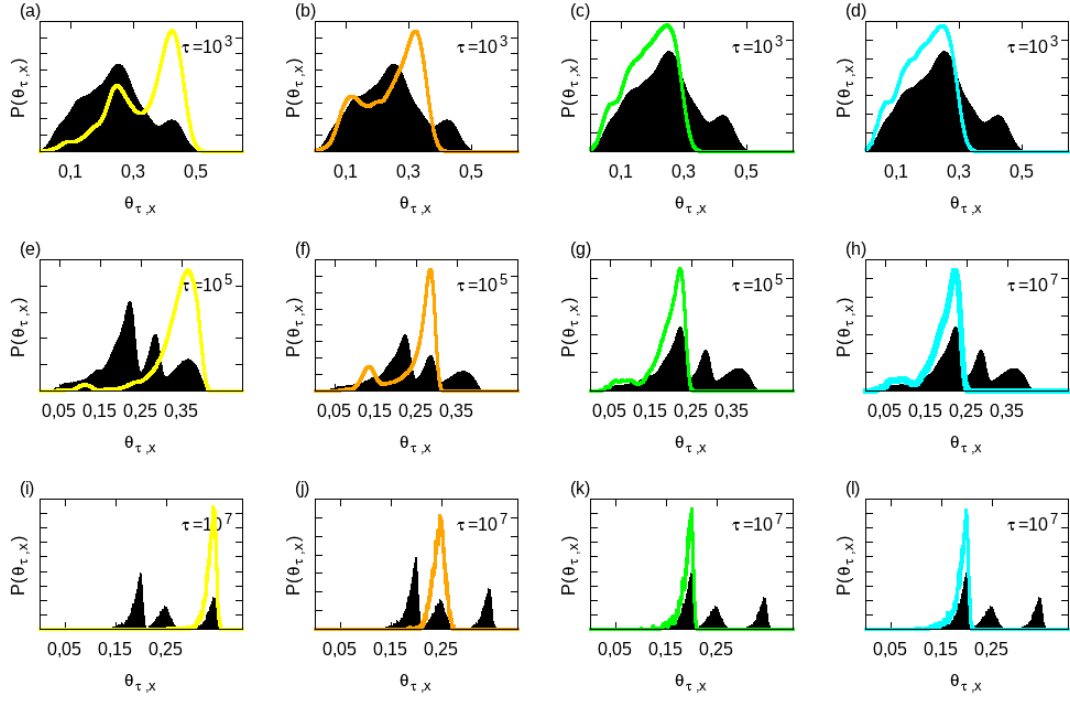


Figura 39 – Distribuições de probabilidade dos ângulos médios geral,  $\Lambda$ , cor preto e em cada uma das quatro regiões,  $\Lambda^{(1)}$ - $\Lambda^{(4)}$ , de esquerda à direita, respectivamente. Parâmetros  $k = 0,90$  e (a-d)  $\tau = 10^3$ , (e-h)  $\tau = 10^5$  e (i-l)  $\tau = 10^7$ .

---

## 6. Hiperbolicidade parcial dentro de regimes de movimento em sistemas Hamiltonianos

---

Os resultados deste capítulo foram obtidos com a colaboração do Prof. Dr. Rafael Marques da Silva. Usando o espectro dos FTLEs, o efeito de aprisionamento dinâmico na trajetória caótica foi classificado em distintos regimes de movimento [71–74]. Quando todos os FTLEs são zero dentro de uma janela de tempo, temos um regime ordenado, quando todos são positivos, o regime é caótico. No meio, temos regimes que são chamados de semiordenados [74], embora seja possível ter FTLEs positivos. Embora o conceito de regimes seja bem conhecido, foi apenas recentemente que este conceito foi aplicado para melhorar a compreensão da dinâmica em sistemas Hamiltonianos fracamente caóticos de dimensão superior: como um procedimento de filtragem para o aumento substancial na caracterização do aprisionamento dinâmico [75], e para descrever a sincronização de aprisionamento dinâmico intermitente [22].

Além das propriedades complexas encontradas na dinâmica de sistemas de dimensões superiores, a principal dificuldade em descrever tal dinâmica reside em nossa incapacidade de visualizar adequadamente o movimento em mais de três dimensões. Portanto, precisamos encontrar propriedades adicionais que nos ajudem nessa tarefa. Os CLVs não só nos permitem calcular os ângulos entre as variedades invariantes e possibilitar uma melhor visualização do que ocorre em tais sistemas de dimensões superiores, mas também fornecem percepções mais profundas sobre a origem do efeito de aprisionamento dinâmico em tais sistemas.

Neste capítulo aplicamos os ângulos entre CLVs para entender as estruturas dinâmicas complexas no espaço de fase misto de sistemas Hamiltonianos fracamente caóticos. Para isso, estudamos a distribuição dos ângulos entre os CLVs no regime ordenado, semi-ordenado e caótico, mencionados anteriormente, para dois sistemas. O primeiro é composto por dois mapas padrões acoplados, enquanto o segundo consiste no sistema contínuo de Hénon-Heiles.

### 6.1 Definição dos regimes

Considere um sistema com  $2N$  graus de liberdade no espaço de fase, o cálculo dos FTLEs, que em média estão em ordem decrescente, é obtido usando o algoritmo tradicional de Benettin [51, 109]. Para as janelas temporais  $\tau$  escolhidas, a magnitude dos FTLEs calculados a partir do algoritmo de Ginelli são numericamente iguais, pelo que

serão denominados também de FTLEs. Chamamos à atenção que eles diferem em essência daqueles calculados a partir dos CLVs.

Agora vamos definir os regimes, para os quais precisamos calcular o espectro dos FTLEs  $\{\lambda_{\tau,x}^{(i=1\dots 2N)}\}$  restrito à trajetória  $\{f^\tau(x)\}$ . Para algum tempo  $\tau$ , inversões da ordem  $(\lambda_{\tau,x}^{(i+1)} > \lambda_{\tau,x}^{(i)})$  pode ocorrer e optamos por reordenar, tal que  $\lambda_{\tau,x}^{(1)} > \lambda_{\tau,x}^{(2)}, \dots, \lambda_{\tau,x}^{(N)} \geq 0$ . Isto nos permite explorar propriedades temporais através das séries temporais dos FTLEs,  $\{\lambda_{\tau,x}^{(i)}\}$  [22, 75].

Uma dada trajetória pertence a um regime do tipo  $S_M$  se tiver  $M$  FTLEs  $\lambda_{\tau,x}^{(i)} > \varepsilon_i$ , onde  $\varepsilon_i \ll \lambda_{\infty,x}^{(i)}$  são pequenos *limites*. Enquanto regimes  $S_i$  com  $0 < i < N$  são chamados *semi-ordenados*, regimes  $S_0$  e  $S_N$  são nomeados *ordenados* e *caóticos*, respectivamente. Para escolher o tamanho da janela de tempo  $\tau$  que separa os regimes de movimento, depende do sistema considerado e é a parte mais difícil e delicada da análise numérica. Inúmeras simulações são necessárias para encontrar a janela mais satisfatória, que deve ser grande o suficiente para ter uma estimativa confiável dos FTLEs, mas também pequena o suficiente para garantir uma resolução aceitável da variação temporal dos  $\lambda_{\tau,x}^{(i)}$ .

Para apresentar nossos resultados, consideramos dois sistemas, o modelo de mapas acoplados representando sistemas de tempo discretos e o sistema dinâmico contínuo de Hénon-Heiles. Os resultados da seção (6.2) foram obtidos pelo Prof. Dr. Rafael Marques da Silva.

## 6.2 O modelo de mapas acoplados

Consideramos um sistema Hamiltoniano  $2N$ -dimensional constituído pela composição discreta temporal  $\mathbf{T} \circ \mathbf{M}$ . Uma etapa é dada pela iteração simpléctica de  $N$  mapas bidimensionais  $\mathbf{M} = (M_1, \dots, M_N)$  e a outra etapa sendo um acoplamento simpléctico  $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_N)$  [110]. A transformação  $\mathbf{M}$  esta dada por

$$\mathbf{M}_i \begin{pmatrix} p_i \\ x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_i + \kappa_i \sin(2\pi x_i) & \text{mod } 1 \\ x_i + p_i + \kappa_i \sin(2\pi x_i) & \text{mod } 1 \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

e o acoplamento  $\mathbf{T}$  por

$$\mathbf{T}_i \begin{pmatrix} p_i \\ x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_i + \sum_{j=1}^N \xi_{i,j} \sin[2\pi(x_i - x_j)] \\ x_i \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

com  $\xi_{i,j} = \xi_{j,i} = \frac{\xi}{\sqrt{N-1}}$  sendo a força de acoplamento total e cada  $\kappa_i$  é o parâmetros não linear de um mapa padrão com espaço de fase normalizado,  $K_i = \kappa_i/(2\pi)$ . Variáveis  $(x_i, p_i)$  são conjugadas aos pares. Nas simulações numéricas, usamos apenas o caso  $N = 2$ ,



resultando no mapa quadridimensional proposto originalmente por Froeschlé [111, 112], e usado também na Ref. [113]. Os parâmetros não lineares correspondentes a uma dinâmica de espaço de fase mista para o caso desacoplado, a saber  $\kappa_1 = 0,54, \kappa_2 = 0,55$ . Para este caso, o espaço de fase possui uma grande ilha regular cercada pelo mar caótico. A intensidade do acoplamento entre os mapas 1 e 2 é  $\xi = 0.1$ , e o sistema acoplado tem dois FTLEs positivos relacionados a variedades instáveis e dois FTLEs negativos, relacionados a variedades estáveis.

**Regimes de movimento.** Na Fig. 40(a), que exibe uma janela da série temporal, os maiores FTLEs com  $\tau = 100$ ,  $\lambda_{100,x}^{(1)}$  e  $\lambda_{100,x}^{(2)}$ , são mostrados em função do tempo ao longo de uma trajetória. Nesta trajetória, alguns regimes de movimento são marcados por setas: o regime  $S_2$ , para o qual ambos os FTLEs são maiores que um limite,  $\varepsilon_1 = 0,1$  (linha pontilhada superior) para  $\lambda_{100,x}^{(1)}$ , e  $\varepsilon_2 = 0,05$  (linha pontilhada inferior) para  $\lambda_{100,x}^{(2)}$ ; o regime  $S_1$ , para o qual apenas  $\lambda_{100,x}^{(1)}$  é maior que  $\varepsilon_1$ ; e o regime  $S_0$ , para o qual ambos os FTLEs são menores do que seus limites. Regimes  $S_1$  e  $S_0$  estão associados a armadilhas dinâmicas que ocorrem perto de estruturas quase invariantes que vivem em espaços de fase de alta dimensão de sistemas conservativos com dinâmica mista [75, 114].

Nosso objetivo é entender o que acontece com os ângulos  $\theta_{1,x}^{(i,j)}$  em tais regimes. Foram estudados os ângulos entre os subespaços instáveis,  $\theta_{1,x}^{(1,2)}$ , os ângulos entre o subespaço mais instável e o subespaço mais estável,  $\theta_{1,x}^{(1,4)}$ , assim como os ângulos entre o subespaço menos instável e o subespaço menos estável,  $\theta_{1,x}^{(2,3)}$ . Para conciliar com a literatura, neste capítulo os ângulos vão ser definidos no intervalo de  $(0, \pi)$ .

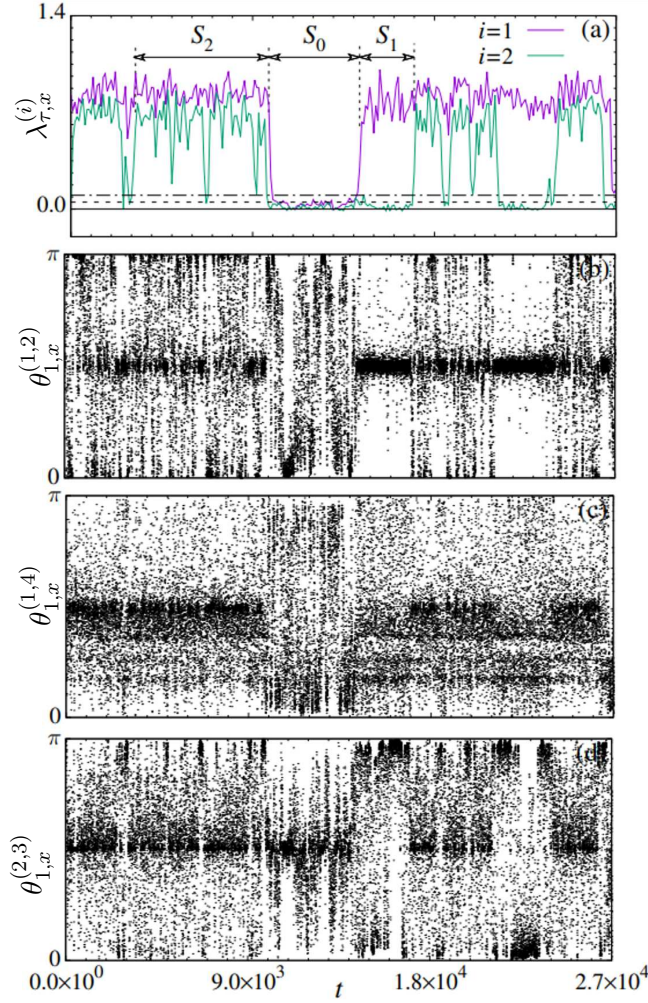


Figura 40 – (a) Séries temporais dos FTLEs  $\{\lambda_{100,x}^{(i)}\}$  ( $i = 1, 2$ ) para o mapa (6.1)-(6.2) com  $\kappa_1 = 0,54$ ,  $\kappa_2 = 0,55$ , e  $\xi = 10^{-1}$ , mostrando os regimes de movimento  $S_0$ ,  $S_1$  e  $S_2$ . Os limites  $\varepsilon_1 = 0,1$  e  $\varepsilon_2 = 0,05$  são representados pelo preto linhas tracejadas e pontilhadas pretas, respectivamente, enquanto a linha preta contínua indica o valor 0. Em (b), (c), e (d) os ângulos  $\theta_{1,x}^{(1,2)}$ ,  $\theta_{1,x}^{(1,4)}$  e  $\theta_{1,x}^{(2,3)}$  são plotados, respectivamente, para a mesma janela de tempo.

As Figs 40(b), 40(c), e 40(d) mostram, respectivamente, a série dos ângulos  $\theta_{1,x}^{(1,2)}$ ,  $\theta_{1,x}^{(1,4)}$ , e  $\theta_{1,x}^{(2,3)}$  da trajetória mostrada na Fig. 40(a). Para os regimes  $S_2$  observamos que os três ângulos permitem valores entre 0 e  $\pi$ , com maior probabilidade de ter  $\pi/2$ . Para os regimes  $S_1$  nós vemos que  $\theta_{1,x}^{(1,2)}$  permanece fortemente localizado ao redor  $\pi/2$  (ortogonalidade hiperbólica), o ângulo  $\theta_{1,x}^{(1,4)}$  torna-se uniformemente distribuído em  $[0, \pi]$ , e o ângulo  $\theta_{1,x}^{(2,3)}$  tende a ter mais valores próximos a 0 ou  $\pi$ . Finalmente, no regime ordenado  $S_0$ , o ângulo  $\theta_{1,x}^{(2,3)}$  tende a se aproximar de  $\pi/2$ , enquanto  $\theta_{1,x}^{(1,2)}$  e  $\theta_{1,x}^{(1,4)}$  se espalham entre 0 e  $\pi$ . As tendências dos ângulos  $\theta_{1,x}^{(i,j)}$  observadas são restritas à janela de tempo da trajetória caótica mostrada na Fig. 40(a). Para demonstrar que tais tendências são uma propriedade geral de trajetórias caóticas dentro dos regimes de movimento, é necessário investigar a distribuição dos ângulos.

**Distribuição dos ângulos.** Os resultados são mostrados nas Figs. 41(a)-41(d) para os ângulos locais  $\theta_{1,x}^{(i,j)}$  e nas Figs. 41(e)-41(h) para os valores médios de  $\theta_{1,x}^{(i,j)}$  ao longo da janela de tempo de  $\tau = 100$  iterações, representado por  $\theta_{100,x}^{(i,j)}$ . Na Fig. 41(a) e 41(e), as distribuições de  $\theta_{1,x}^{(1,2)}$ ,  $\theta_{1,x}^{(1,4)}$ , e  $\theta_{1,x}^{(2,3)}$ , e de seus respectivos valores médios  $\theta_{100,x}^{(1,2)}$ ,  $\theta_{100,x}^{(1,4)}$ , e  $\theta_{100,x}^{(2,3)}$ , são mostrados, respectivamente, para toda a trajetória, isto é, nenhum regime de movimento é considerado. Observamos que o ângulo  $\theta_{1,x}^{(1,2)}$  e seu valor médio tendem a ter um pico em torno  $\pi/2$ , com algumas caudas simétricas longas ao redor  $\theta = \pi/2$  para  $\theta_{1,x}^{(i,j)}$ . O ângulo local  $\theta_{1,x}^{(1,2)}$  tem probabilidade significativa nos limites 0 e  $\pi$  (ver linha preta), e uma tangência próxima entre as duas variedades instáveis é esperada. Os valores locais e médios de  $\theta_{1,x}^{(2,3)}$  têm, respectivamente, picos mais nítidos e mais largos ao redor  $\pi/2$ . Por outro lado, o ângulo médio  $\theta_{100,x}^{(1,4)}$  tem probabilidade menor de ser igual a  $\pi/2$ , mas a distribuição é simétrica em torno deste valor, com  $\theta_{100,x}^{(1,4)} = 1,34$  e  $\theta_{100,x}^{(1,4)} = 1,79$  sendo os mais prováveis.

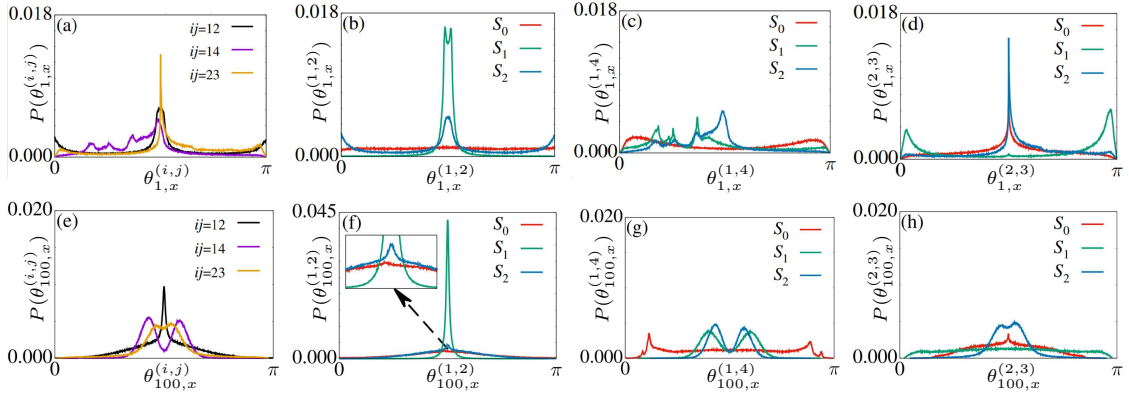


Figura 41 – Distribuições dos ângulos  $\theta_{1,x}^{(i,j)}$  [(a)-(d)] e dos valores médios  $\theta_{100,x}^{ij}$  [(e)-(h)] para o mapa (6.1)-(6.2) com  $\kappa_1 = 0,54$ ,  $\kappa_2 = 0,55$ , e  $\xi = 10^{-1}$ . Em (a) e (e), a trajetória completa é considerada. In (b) and (f) ( $\theta_{1,x}^{(1,2)}$ ), (c) e (g) ( $\theta_{1,x}^{(1,4)}$ ), (d) e (h) ( $\theta_{1,x}^{(2,3)}$ ), apenas ângulos dentro de cada regime de movimento são contemplados.

**Regimes e distribuições dos ângulos.** Agora analisamos as distribuições obtidas separando a trajetória nos regimes de movimento definidos acima. Na Fig. 41(b) e 41(f) exibimos, respectivamente, a probabilidade  $P(\theta_{1,x}^{(1,2)})$  e  $P(\theta_{100,x}^{(1,2)})$  do ângulo local  $\theta_{1,x}^{(1,2)}$  e seu valor médio  $\theta_{100,x}^{(1,2)}$ . Notamos que o regime semi-ordenado  $S_1$  tem grandes picos ao redor  $\pi/2$  e é, portanto, responsável pelos picos mais nítidos ao redor  $\pi/2$  observado nas Figs. 40(a) e 40(e). Esses enormes picos sugerem a predominância da ortogonalidade entre os dois subespaços de Oseledec associados ao subespaço instável,  $E_x^{(u)} = E_x^{(1)} \oplus E_x^{(2)}$ , durante o regime semi-ordenado  $S_1$ . Observa-se probabilidade quase zero para  $\theta_{1,x}^{(1,2)}$  perto de 0 ou  $\pi$  no regime semi-ordenado. Para o regime caótico  $S_2$ ,  $P(\theta_{1,x}^{(1,2)})$  tem um pequeno pico ao redor  $\pi/2$  e longas caudas simétricas, que se sobrepõem à probabilidade do regime ordenado  $S_0$  no caso do ângulo médio [ver Fig. 41(f)]. Estas caudas explicam as caudas observadas para  $P(\theta_{1,x}^{(1,2)})$  na Fig. 41(a). O ângulo local  $\theta_{1,x}^{(1,2)}$  no regime ordenado  $S_0$  admite

valores 0 e  $\pi$ , de modo que a quase-tangência próxima entre as duas variedades instáveis também é observada.

As Figs. 41(c) e 41(g) exibem  $P(\theta_{1,x}^{(1,4)})$  e  $P(\theta_{100,x}^{(1,4)})$  para os valores locais e médios de  $\theta_{1,x}^{(1,4)}$ , respectivamente, para os distintos regimes de movimento. Em Fig. 41(g) podemos ver que as distribuições  $P(\theta_{100,x}^{(1,4)})$  para os regimes  $S_1$  e  $S_2$  assumir valores próximos a 0 em  $\pi/2$ , mas aumenta simetricamente em torno deste valor, com picos em 1,27 e 1,89 para  $S_1$  e em 1,36 e 1,79 para  $S_2$ . Para  $S_0$ , muitos valores de  $\theta_{1,x}^{(1,4)}$  e  $\theta_{100,x}^{(1,4)}$  são permitidos, mas nunca alcançam 0 ou  $\pi$ . No entanto, pequenos picos de  $P(\theta_{100,x}^{(1,4)})$  são vistos perto de 0,36 e 2,78. Notamos que  $P(\theta_{1,x}^{(1,4)})$  para  $S_0$  não aparece na Fig. 41(a) uma vez que este regime raramente ocorre em toda a trajetória. Mencionamos que  $P(\theta_{1,x}^{(1,4)})$  relacionado aos ângulos locais  $\theta_{1,x}^{(1,4)}$  não é simétrico ao redor  $\pi/2$ . Finalmente, a Fig. 41(d) exhibe  $P(\theta_{1,x}^{(2,3)})$ , mostrando que a principal contribuição para a obtenção de valores  $\approx \pi/2$  para o ângulo local  $\theta_{1,x}^{(2,3)}$  e seu valor médio  $\theta_{100,x}^{(2,3)}$  vem do regime caótico  $S_2$ . Na Fig. 41(h) é possível ver que para o regime semi-ordenado  $S_1$ , além de 0 e  $\pi$ , os outros valores para o ângulo médio são igualmente prováveis. No entanto, os ângulos locais  $\theta_{1,x}^{(2,3)} = 0,09$  e  $\theta_{1,x}^{(2,3)} = 3,05$  tornando-se mais prováveis. A probabilidade  $P(\theta_{1,x}^{(2,3)})$  do regime ordenado  $S_0$  tem um pico perto de  $\pi/2$ , mas outros ângulos são possíveis. Os limites 0 e  $\pi$  não foram observados.

### 6.3 Sistema Hénon-Heiles

**Regimes e dinâmica no espaço de fase.** Para a integração do sistema Hénon-Heiles, bem como descrever a evolução no espaço tangente  $D_x\varphi^t$ , o algoritmo de Runge-Kutta de quarta ordem foi usado, com um intervalo de tempo  $\Delta\tau = 0,01$ . Uma janela de tempo  $\tau = 250$  foi usado para calcular o espectro de FTLEs  $\{\lambda_{250,x}^{(i=1,\dots,4)}\}$ . Devido à simetria do espectro LE, consideramos apenas os dois primeiros FTLEs em nossa análise. As simulações mostram que  $\lambda_{250,x}^{(2)}$ , associado ao subespaço central, varia um pouco em torno de zero. O valor do FTLE  $\lambda_{250,x}^{(1)}$  nos permite definir os diferentes regimes de movimento.

Definiremos os ângulos no intervalo  $\theta_{\tau,x}^{(i,j)} \in (0,\pi)$ . Como foi mencionado, os ângulos relacionados aos CLVs que geram subespaços com dimensão maior que um são definidos pela base escolhida. No caso da base dada pelo algoritmo de Ginelli, nossas simulações mostram que  $\theta_{\Delta\tau,x}^{(1,2)} \approx \theta_{\Delta\tau,x}^{(1,3)}$ , e  $\theta_{\Delta\tau,x}^{(2,4)} \approx \theta_{\Delta\tau,x}^{(3,4)}$ , enquanto  $\theta_{\Delta\tau,x}^{(2,3)} \approx \{0, \pi\}$ . Portanto, todas as informações relevantes sobre a dinâmica no espaço tangente podem ser fornecidas pelos ângulos locais  $\theta_{\Delta\tau,x}^{(1,2)}$ ,  $\theta_{\Delta\tau,x}^{(1,4)}$  e  $\theta_{\Delta\tau,x}^{(3,4)}$ , e os seus respectivos valores médios  $\theta_{250,x}^{(1,2)}$ ,  $\theta_{250,x}^{(1,4)}$  e  $\theta_{250,x}^{(3,4)}$ .

A Fig. 42 apresenta as superfícies da seção de Poincaré (PSS *das siglas em inglês*)  $(p_y, y)$  para o sistema Hénon-Heiles com cores indicando diferentes quantidades físicas. Na Fig. 42(a), o FTLE  $\lambda_{250,x}^{(1)}$  é mostrado. Os valores de  $\lambda_{250,x}^{(1)}$  mudam entre 0 e 0,20, de acordo com a barra de cores. Para a energia  $E = 1/6$ , temos uma dinâmica mista. Começamos as condições iniciais dentro da região caótica do espaço de fase para que os toros regulares em

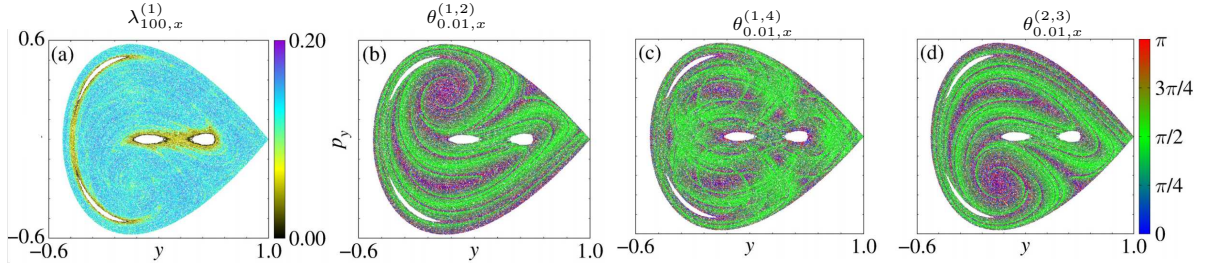


Figura 42 – Seções de Poincaré do sistema Hénon-Heiles com energia  $E = 1/6$  mostrando (a) o FTLE  $\lambda_{250,x}^{(1)}$ , e os ângulos  $\theta_{\Delta\tau,x}^{(1,2)}$  em (b),  $\theta_{\Delta\tau,x}^{(1,4)}$  em (c), e  $\theta_{\Delta\tau,x}^{(3,4)}$  em (d).

torno dos pontos fixos estáveis não possam ser penetrados. Os valores de  $\lambda_{250,x}^{(1)}$  na região caótica são grandes, enquanto perto dos toros regulares, eles diminuem, como esperado devido ao aprisionamento dinâmico. Figs. 42(b), 42(c) e 42(d) mostram, respectivamente, o mesmo PSS mas os ângulos  $\theta_{\Delta\tau,x}^{(1,2)}$ ,  $\theta_{\Delta\tau,x}^{(1,4)}$  e  $\theta_{\Delta\tau,x}^{(3,4)}$  são denotados pelas cores. Chama a atenção a complexidade nos valores possíveis dos ângulos entre 0 e  $\pi$ . A partir dessas figuras, nenhuma distinção aparente ocorre perto dos toros estáveis.

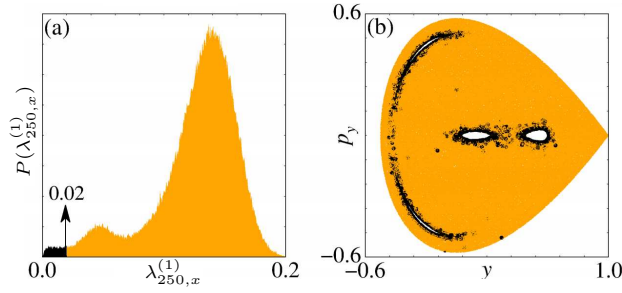


Figura 43 – (a) Distribuição dos FTLEs  $\lambda_{250,x}^{(1)}$  e (b) a PSS [o mesmo que Fig. 42(a)] com cor preta em  $\lambda_{250,x}^{(1)} < 0,02$  e cor laranja para  $\lambda_{250,x}^{(1)} \geq 0,02$ .

Inúmeras simulações foram necessárias para encontrar a janela de tempo apropriada para  $\lambda_{250,x}^{(1)}$ , que separa os regimes de movimento. Para mostrar isso com mais detalhes, apresentamos na Fig. 43(a) a distribuição do FTLE, mas usando cores para separar o limite  $\varepsilon_1 = 0,02$ . Para valores  $\lambda_{250,x}^{(1)} < 0,02$  usamos a cor preta, enquanto os valores  $\lambda_{250,x}^{(1)} > 0,02$  são indicados pela cor laranja. Figure 43(b) exibe os valores correspondentes no PSS. Isso mostra que quando a trajetória caótica está perto do torus regular, o FTLE  $\lambda_{250,x}^{(1)}$  está abaixo do limite. Assim, o limite escolhido separa os movimentos afetados pelo torus.

Nossa primeira tarefa é verificar se o limite escolhido pode separar adequadamente os regimes de movimento. No sistema de Hénon-Heiles, nós temos apenas um FTLE positivo, e, portanto, apenas o regime caótico  $S_1$  e o regime ordenado  $S_0$  são observados. Neste caso, diferente dos mapas acoplados dados por Eqs. (6.1)-(6.2), nós não temos regimes semi-ordenados. Na Fig. 44(a) está plotado  $\lambda_{250,x}^{(1)}$  dentro de um intervalo de tempo, mostrando claramente como os dois regimes podem ser separados. O limite  $\varepsilon_1 = 0,02$  é indicado pela linha tracejada-pontilhada preta. Figs. 44(b), 44(c) e 44(d) mostram,



respectivamente, a evolução temporal dos ângulos  $\theta_{1,x}^{(1,2)}$ ,  $\theta_{1,x}^{(1,4)}$  e  $\theta_{1,x}^{(3,4)}$ , junto com seu valor médio (linha vermelha) em uma janela de tempo de  $\tau = 250$ . Notamos que no regime caótico  $S_1$ , todos os ângulos são uniformemente distribuídos entre 0 e  $\pi$ , tendo um valor médio  $\approx \pi/2$ . No regime ordenado  $S_0$ , o valor médio dos ângulos começa a oscilar fortemente, e valores próximos a  $\pi/2$  tornam-se raros. Especialmente o ângulo  $\theta_{1,x}^{(1,4)}$  agora assume valores próximos de 0 e  $\pi$ , significando um alinhamento próximo. Como no caso do mapa acoplado, também aqui as propriedades específicas dos ângulos entre variedades são responsáveis pelos distintos regimes de movimento.

### Regimes e distribuições dos ângulos.

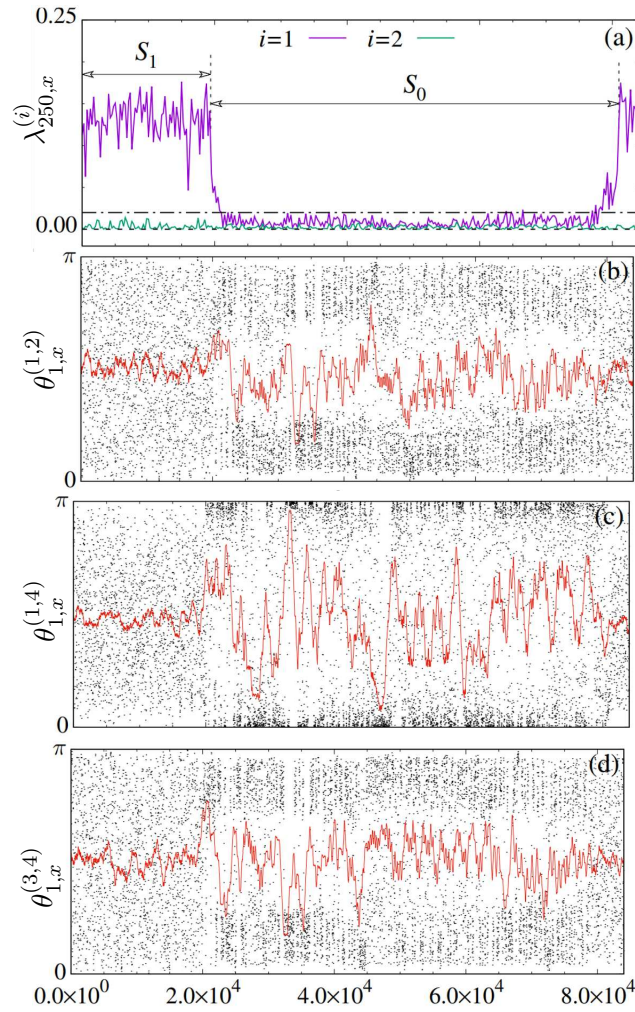


Figura 44 – (a) Serie temporal dos FTLs  $\{\lambda_{250,x}^{(i)}\}$  ( $i = 1, 2$ ) para o sistema de Hénon-Heiles com energia  $E = 1/6$ , mostrando os regimes de movimento  $S_0$  e  $S_1$ . O limite  $\varepsilon_1 = 0,02$  é representado pela linha preta ponto-traço, enquanto a linha tracejada preta indica o valor 0. Os painéis (b), (c) e (d) mostram, respectivamente, as séries temporais dos ângulos  $\theta_{1,x}^{(1,2)}$ ,  $\theta_{1,x}^{(1,4)}$ , e  $\theta_{1,x}^{(3,4)}$  (preto), junto com seus valores médios  $\theta_{250,x}^{(1,2)}$ ,  $\theta_{250,x}^{(1,4)}$  e  $\theta_{250,x}^{(3,4)}$  (vermelho).

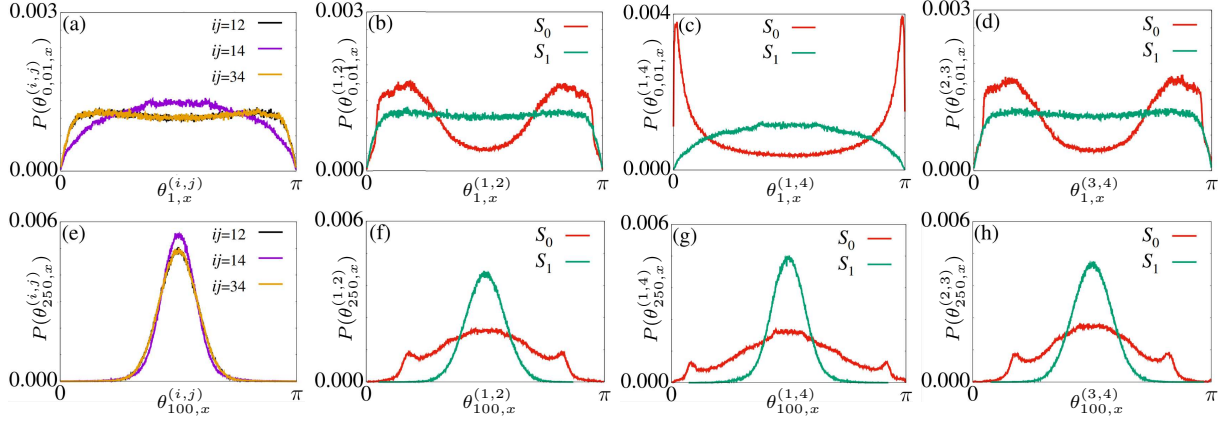


Figura 45 – Distribuição dos ângulos  $\theta_{\Delta\tau,x}^{(i,j)}$  [(a)-(d)] e valores médios  $\theta_{250,x}^{(i,j)}$  [(e)-(h)] para o sistema Hénon-Heiles com  $E = 1/6$ . Em (a) e (e), a trajetória completa foi considerada. Em (b) e (f) ( $\theta_{1,x}^{(1,2)}$ ), (c) e (g) ( $\theta_{1,x}^{(1,4)}$ ), (d) e (h) ( $\theta_{1,x}^{(3,4)}$ ), apenas ângulos dentro de cada regime de movimento foram considerados.

Como no caso do mapa acoplado, as tendências dos ângulos, observadas nas Figs. 44(b)-(d), deve ser verificado investigando a distribuição dos ângulos dentro dos distintos regimes de movimento. Os resultados são mostrados nas Figs. 45(a)-(d) para os ângulos locais  $\theta_{1,x}^{(i,j)}$  e nas Figs. 45(e)-(h) para os valores médios. Figs. 45(a) e (e) mostram, respectivamente, os valores de  $\theta_{1,x}^{(i,j)}$ , e o seus valores médios, para a trajetória completa. Embora os valores locais de  $\theta_{1,x}^{(i,j)}$  tendem a se espalhar por todo o intervalo do ângulo (exceto 0 e  $\pi$ ), as distribuições dos valores médios  $\theta_{250,x}^{(i,j)}$  parecem distribuições gaussianas, como esperado para um sistema caótico. Todas as outras figuras exibem as distribuições dos ângulos dentro de cada regime de movimento. Para o regime caótico  $S_1$  observamos, quanto à trajetória completa, que os valores locais de  $\theta_{1,x}^{(i,j)}$  tendem a se espalhar por todo o intervalo do ângulo (exceto 0 e  $\pi$ ), enquanto seus valores médios  $\theta_{250,x}^{ij}$  aproximam de distribuições gaussianas. Por outro lado, os ângulos locais  $\theta_{1,x}^{(i,j)}$  do regime ordenado  $S_0$  têm grande probabilidade longe de  $\pi/2$  mas também tendem a zero perto de 0 e  $\pi$ . A exceção é o ângulo  $\theta_{1,x}^{(1,4)}$ , para o qual encontramos grande probabilidade nas fronteiras, o que significa que um alinhamento próximo entre as variedades instáveis e estáveis é esperado.



---

## 7. Medidas do grau de hiperbolicidade parcial

---

Como foi visto no capítulo 3, que a aplicação  $f : M \rightarrow M$  seja hiperbólica, parcialmente hiperbólica ou não-uniformemente hiperbólica, depende diretamente de como o operador  $D_x f^t$  expande (contraí) exponencialmente as diferentes direções do fibrado tangente  $TM$  e das relações entre as diferentes taxas de expansão (contração). Os expoentes de Lyapunov definidos no capítulo 3, através da decomposição de Oseledec, caracterizam as taxas dessas expansões (contrações) para um tempo assintótico. Porém, estamos interessados numa análise a tempo finito. As bases para uma análise do grau de hiperbolicidade parcial a tempo finito também são fornecidas pelo teorema de Oseledec através da propriedade de invariância dos subespaços de Oseledec sob a dinâmica no fibrado tangente, permitindo definir os FTLEs e os ângulos médios entre os diferentes subespaços.

Neste capítulo, abordaremos o problema de quantificar explicitamente e de forma consistente, o grau de hiperbolicidade, ou mais geral, o grau de hiperbolicidade parcial a tempo finito  $\tau$ . Estes quantificadores nos permitirá obter mais informações para caracterizar as propriedades dinâmicas e geométricas dos sistemas em regiões específicas do espaço de fase, além disso, ao serem restritas sobre um tempo finito  $\tau$ , também poderão ser usados para estudar fenômenos a diferentes escalas temporais. Os quantificadores são aplicáveis para pontos que permitam uma decomposição de Oseledec, assim como para um conjunto do espaço de fase com medida maior que zero. Estes quantificadores são baseados no conceito da decomposição dominada restrita às trajetórias de longitude temporal finita.

Começamos introduzindo, sem muito detalhe, os conceitos teóricos necessários. Em seguida, definiremos quantificadores da hiperbolicidade parcial a tempo finito de pontos no espaço de fase,  $x \in M$ . Depois introduziremos quantificadores sobre conjuntos com medida maior que zero. Depois definimos cada um dos nossos quantificadores do grau da hiperbolicidade parcial para conjuntos e finalmente aplicados a dois sistemas. Os quantificadores serão calculados analiticamente para o sistema de Hénon-Heiles e com um enfoque mais numérico para o mapa padrão.

### 7.1 Conjuntos de probabilidade total

Os quantificadores da hiperbolicidade parcial serão aplicáveis sobre um conjunto do espaço de fase que permita uma decomposição de Oseledec introduzida na seção 3.1. De forma mais geral, consideraremos sistemas onde é possível reformular o teorema de

Oseledec dizendo que a decomposição e os limites dos expoentes de Lyapunov associados aos subespaços seja válido para um subconjunto,  $\Lambda \subseteq M$  de probabilidade total. Um conjunto de probabilidade total  $\Lambda \subseteq M$  tem a propriedade que  $\mu(\Lambda) = 1$  para a medida invariante  $\mu$ . Em nosso contexto, a medida  $\mu$  é a medida de Lebesgue.

O conjunto  $M$  é o espaço de fase e o conjunto de probabilidade total  $\Lambda \subseteq M$  é uma região caótica desconectada e normalizada, ver Fig. 46. Os quantificadores da hiperbolicidade parcial estarão definidos para um subconjunto  $S \subseteq \Lambda$  com medida maior que zero, ou seja

$$0 < \mu(S) = \int_S d\mu \leq 1, \quad \mu(S) = \frac{A(S)}{A(\Lambda)} \quad (7.1)$$

onde  $A(S)$  é a área/volume no espaço de fase, e a igualdade é obtida se e somente se  $S = \Lambda$ .  $\mu(S)$  é igual a porção da área  $S$  em  $\Lambda$ . Assim,  $\Lambda$  é normalizada para a medida  $\mu$

$$\mu(\Lambda) = A(\Lambda) = \int_{\Lambda} d\mu = 1. \quad (7.2)$$

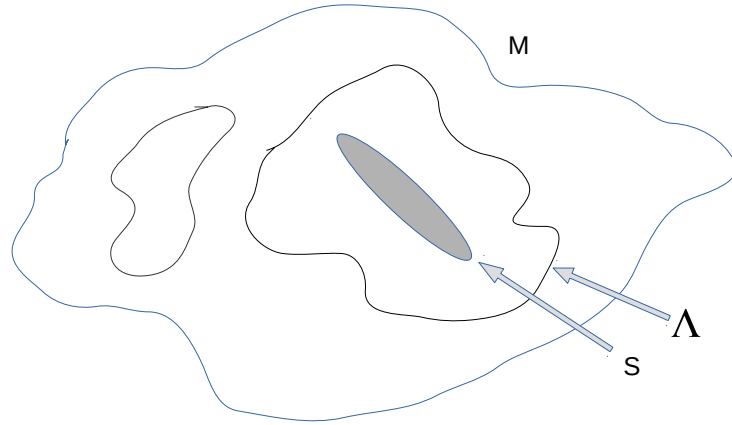


Figura 46 – Espaço de fase  $M$ , região caótica desconectada  $\Lambda$ , região de interesse  $S$ . Cada região  $\Lambda$  é considerada sendo um conjunto de probabilidade total, isto é,  $\mu(S) = A(S)/A(\Lambda)$ , onde  $A(S)$  é igual ao valor da medida de Lebesgue do conjunto  $S$ .

Os quantificadores da hiperbolicidade parcial dependerão de uma função  $\varphi$ , que caracterizará a hiperbolicidade parcial de um ponto  $x$ , e será definida abaixo. Assim, para quantificar a hiperbolicidade parcial sobre o conjunto  $S$ , consideraremos como um ingrediente natural a média do espaço da função  $\varphi$  em  $S$ .

## 7.2 Conjunto $(\tau, \epsilon)$ -parcialmente hiperbólico

Com os conceitos apresentados, podemos começar com a construção de nossos quantificadores da hiperbolicidade parcial. Nesta seção definiremos os conjuntos

$(\tau, \epsilon)$ -parcialmente hiperbólicos. Esses conjuntos vão ser definidos através de uma modificação da decomposição de Oseledec  $\tau$ -dominada. Chamaremos a esta modificação como decomposição  $(\tau, \epsilon)$ -dominada, definida como segue.

Seja  $M$  uma variedade compacta de dimensão  $d \geq 2$ . Seja  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo e  $\Lambda \subset M$  um conjunto  $f$ -invariante. Supor que para cada  $x \in \Lambda$  existem subespaços não nulos  $E_x^{(1)}$  e  $E_x^{(2)}$  tal que  $T_x M = E_x^{(1)} \oplus E_x^{(2)}$ , a dimensão de  $E_x^{(1)}$  e  $E_x^{(2)}$  são constantes para todo  $x \in \Lambda$  e igual a  $d_1$  e  $d_2$ , respectivamente. Os subespaços são  $Df$ -invariantes:  $Df_x(E_x^{(i=1,2)}) = E_{f(x)}^{(i=1,2)}$ .

*Definição.* Seja  $\epsilon \geq 1/2$  e  $\tau \in \mathbb{R}^+$ , dizemos que  $T_x M = E_x^{(1)} \oplus E_x^{(2)}$  é uma *decomposição  $(\tau, \epsilon)$ -dominada* se

$$\frac{\|D_x f^\tau v_x^{(2)}\|^{d_2}}{\|D_x f^\tau v_x^{(1)}\|^{d_1}} \leq \epsilon, \quad (7.3)$$

onde  $v_x^{(i)} \in E_x^{(i)}$  e  $v_x^{(j)} \in E_x^{(j)}$  são vetores unitários.  $\|D_x f^\tau v_x^{(i)}\|^{d_i}$  pode ser visto como o volume de um hipercubo. Assim, a desigualdade (7.3) pode ser vista como a relação de expansão (contração) de volumes entre subespaços depois de uma evolução por um tempo  $\tau$ . De forma mais geral, uma decomposição  $T_\Lambda M = E_x^{(1)} \oplus \dots \oplus E_x^{(k)}$  é  $(\tau, \epsilon)$ -dominada se

$$\frac{\|D_x f^\tau v_x^{(i)}\|^{d_i}}{\|D_x f^\tau v_x^{(j)}\|^{d_j}} \leq \epsilon \quad \forall i \leq j \leq k, \quad (7.4)$$

onde  $v_x^i \in E_x^{(i)} \oplus E_x^{(i-1)} \oplus \dots \oplus E_x^{(1)}$  e  $v_x^j \in E_x^{(j)} \oplus E_x^{(j-1)} \oplus \dots \oplus E_x^{(1)}$ . Dizemos que uma decomposição  $T_x M = E_x^{(1)} \oplus \dots \oplus E_x^{(k)}$  é  $(\tau, \epsilon)$ -dominada em  $x$ , para algum ponto  $x \in \Lambda$ , se é  $(\tau, \epsilon)$ -dominada quando restrita na trajetória  $\{f^\tau(x); \tau \in \mathbb{R}^+\}$  de  $x$ . Se a decomposição  $T_x M = E_x^{(1)} \oplus \dots \oplus E_x^{(k)}$  é a decomposição de Oseledec, então dizemos que é uma decomposição de Oseledec  $(\tau, \epsilon)$ -dominada.

Os FTLEs podem ser vistos como a taxa de expansão (contração) logarítmica de vetores unitários evoluídos por um tempo  $\tau$ . De forma análoga, podemos definir a relação das taxas de volumes entre os subespaços  $E_x^{(i)}$  e  $E_x^{(j)}$ , denotado por  $h_{\tau, x}^{(i, j)}$ , pela seguinte expressão

$$h_{\tau, x}^{(i, j)} = \frac{1}{\tau} \log \left( \frac{\|D_x f^\tau v_x^{(i)}\|^{d_i}}{\|D_x f^\tau v_x^{(j)}\|^{d_j}} \right), \quad (7.5)$$

onde  $v_x^{(i)} \in E_x^{(i)}$ ,  $v_x^{(j)} \in E_x^{(j)}$ ,  $d_i = \dim E_x^{(i)}$  e  $d_j = \dim E_x^{(j)}$ . A relação (7.5) em termos dos FTLEs fica

$$h_{\tau, x}^{(i, j)} = d_i \lambda_{\tau, x}^{(i)} - d_j \lambda_{\tau, x}^{(j)}. \quad (7.6)$$

Considerar volumes e não vetores nos permitirá dar um peso à dimensão dos subespaços nos quantificadores da hiperbolicidade parcial. Definamos agora os pontos  $(\tau, \epsilon)$ -parcialmente hiperbólicos e os conjuntos  $(\tau, \epsilon)$ -parcialmente hiperbólicos.

*Definição.* Dizemos que  $x$  é  $(\tau, \epsilon)$ -parcialmente hiperbólico se  $T_x M$  permite uma decomposição de Oseledec  $(\tau, \epsilon)$ -dominada. Ou equivalentemente, se

$$e^{\tau d_i \lambda_{\tau, x}^{(i)}} e^{-\tau d_j \lambda_{\tau, x}^{(j)}} \leq \epsilon, \quad \forall i > j. \quad (7.7)$$

*Definição.* Seja  $S \subseteq \Lambda$ , então designamos por  $S_\tau^{(\epsilon)} \subseteq S$  ao conjunto composto por todos os pontos  $x \in S$  que são  $(\tau, \epsilon)$ -parcialmente hiperbólicos, ou seja

$$S_\tau^{(\epsilon)} = \{x \in S : x \text{ é } (\tau, \epsilon) - \text{parcialmente hiperbólico}\}, \quad (7.8)$$

$S_\tau^{(\epsilon)}$  será chamado como o *conjunto  $(\tau, \epsilon)$ -parcialmente hiperbólico de  $S$* . Em relação a medida  $\mu$  temos as seguintes desigualdades

$$0 \leq \mu(S_\tau^{(\epsilon)}) \leq \mu(S) \leq \mu(\Lambda) = 1. \quad (7.9)$$

### 7.3 Quantificadores da hiperbolicidade parcial

Estamos prontos para definir de forma geral os nossos quantificadores da hiperbolicidade parcial. Como pode ser previsto da seção anterior, dado o conjunto  $S$ , para cada janela temporal  $\tau$  e parâmetro  $\epsilon \geq 1/2$ , pode ser definido um valor da hiperbolicidade parcial. Portanto denotaremos os nossos quantificadores da hiperbolicidade parcial como *quantificadores do grau da  $(\tau, \epsilon)$ -hiperbolicidade parcial*, que pode ser sobre pontos ou conjuntos específicos do espaço de fase.

Os quantificadores do grau de  $(\tau, \epsilon)$ -hiperbolicidade parcial sobre o conjunto  $S \subseteq \Lambda$ , com  $\mu(\Lambda) = 1$ , dependerão diretamente de dois fatores:

- (i) A relação das medidas entre o conjunto  $(\tau, \epsilon)$ -parcialmente hiperbólico  $S_\tau^{(\epsilon)}$  e o conjunto  $S$ , que denotamos por  $\mu_S^{(\tau, \epsilon)}$ , e definido como

$$0 \leq \mu_S^{(\tau, \epsilon)} = \frac{\mu(S_\tau^{(\epsilon)})}{\mu(S)} \leq 1. \quad (7.10)$$

- (ii) A média de espaço de uma função  $\varphi_{\tau, x}$   $\mu$ -integrável sobre o conjunto  $S$

$$\bar{\varphi}(S) = \frac{1}{\mu(S)} \int_S \varphi_{\tau, x} d\mu. \quad (7.11)$$

A função  $\varphi_{\tau, x}$  quantificará as propriedades da decomposição de Oseledec em  $x \in \Lambda$ , isto é, dependerá do conjunto dos expoentes de Lyapunov a tempo finito, da dimensão dos subespaços de Oseledec, do conjunto de ângulos médios entre os subespaços e da janela temporal  $\tau$ .

Como  $\varphi_{\tau,x}$  depende de propriedades apropriadas da decomposição de Oseledec, então o limite  $\tau \rightarrow \infty$  é herdado para a função  $\varphi_{\tau,x}$ , e portanto o limite  $\varphi_{\infty,x}$  existe.

Se o número  $\varphi_{\tau,x}$  caracteriza apropriadamente a  $(\tau,\epsilon)$ -hiperbolicidade parcial do ponto  $x \in \Lambda$ , então, se  $x$  é um ponto  $(\tau,\epsilon)$ -parcialmente hiperbólico,  $\varphi_{\tau,x}$  é considerado como o grau de  $(\tau,\epsilon)$ -hiperbolicidade parcial de  $x$ .

Além de definir  $(\tau,\epsilon)$ -hiperbolicidade parcial dependente de  $\tau$  e  $\epsilon$ , definiremos dois tipos de  $(\tau,\epsilon)$ -hiperbolicidade parcial para o conjunto  $S$ . A primeira delas, a  $(\tau,\epsilon)$ -hiperbolicidade parcial absoluta, dependerá diretamente do valor da média do conjunto  $\mu(S_\tau^{(\epsilon)})$ . O segundo tipo, a  $(\tau,\epsilon)$ -hiperbolicidade parcial relativa, dependerá da relação entre o valor da média do conjunto  $S_\tau^{(\epsilon)}$  e o valor da media do conjunto total  $S$ .

## 7.4 Quantificador da $(\tau,\epsilon)$ -hiperbolicidade parcial absoluta

Seja  $S \subseteq \Lambda$  com medida diferente de zero,  $\mu(S) > 0$ . O grau de  $(\tau,\epsilon)$ -hiperbolicidade parcial absoluta do conjunto  $S \subseteq \Lambda$ , denotamos por  $\vartheta_{\tau,\epsilon}(S)$ , é definido como

$$\vartheta_{\tau,\epsilon}(S) = \mu_S^{(\tau,\epsilon)} \overline{\varphi}(S_\tau^{(\epsilon)}) = \frac{1}{\mu(S)} \int_{S_\tau^{(\epsilon)}} \varphi_{\tau,x} d\mu. \quad (7.12)$$

Vemos que estes quantificadores dependem diretamente da relação da medida  $\mu_S^{(\tau,\epsilon)}$  e do valor médio  $\overline{\varphi}(S_\tau^{(\epsilon)})$ . Sejam  $S$  e  $S'$  dois conjuntos de  $\Lambda$ , então

$$\vartheta_{\tau,\epsilon}(S) = \vartheta_{\tau,\epsilon}(S') \iff \mu_S^{(\tau,\epsilon)} \overline{\varphi}(S_\tau^{(\epsilon)}) = \mu_{S'}^{(\tau,\epsilon)} \overline{\varphi}(S_\tau^{(\epsilon)}) \quad (7.13)$$

ou equivalentemente

- se  $\overline{\varphi}(S_\tau^{(\epsilon)}) = \overline{\varphi}(S_\tau^{(\epsilon)'})$ , então  $\vartheta_{\tau,\epsilon}(S) \leq \vartheta_{\tau,\epsilon}(S')$  se e somente se  $\mu_S^{(\tau,\epsilon)} \leq \mu_{S'}^{(\tau,\epsilon)}$ .
- se  $\mu_S^{(\tau,\epsilon)} = \mu_{S'}^{(\tau,\epsilon)}$ , então  $\vartheta_{\tau,\epsilon}(S) \leq \vartheta_{\tau,\epsilon}(S')$  se e somente se  $\overline{\varphi}(S_\tau^{(\epsilon)}) \leq \overline{\varphi}(S_\tau^{(\epsilon)'})$ .

Fixando  $\epsilon$ , para  $\tau$  assintóticos, o conjunto de pontos  $(\tau,\epsilon)$ -parcialmente hiperbólicos converge ao conjunto total, então,  $\mu_S^{(\infty,\epsilon)} = 1$ , e portanto

$$\vartheta_{\infty,\epsilon}(S) = \overline{\varphi}(S) = \frac{1}{\mu(S)} \int_S \varphi_{\infty,x} d\mu \quad (7.14)$$

além disso, se  $f$  é ergódico em  $\Lambda$ , então  $\varphi_{\infty,x}$  não depende do ponto  $x$ . Assim,

$$\vartheta_{\infty,\epsilon}(S) = Cte < \infty \quad \forall S \subseteq \Lambda. \quad (7.15)$$

Em outras palavras, o grau de  $(\tau,\epsilon)$ -hiperbolicidade parcial absoluta para  $\tau$  assintótico é finito e independente do subconjunto  $S$ . Fixando  $\tau$ , temos a seguinte desigualdade para a relação de medidas

$$\mu_S^{(\tau,\epsilon)} \geq \mu_S^{(\tau,\epsilon')} \quad \forall \epsilon \leq \epsilon', \quad (7.16)$$

isto é, dada uma janela de tempo  $\tau$ , o número de pontos  $(\tau, \epsilon)$ -parcialmente hiperbólicos é igual ou menor quando o valor de  $\epsilon$  aumenta. Se  $\epsilon$  aumenta, significa que pontos  $(\tau, \epsilon)$ -parcialmente hiperbólicos devem ter uma decomposição de Oseledec  $(\tau, \epsilon)$ -dominada mais pronunciada, e em consequência, um maior grau de hiperbolicidade parcial é esperado. Porém, existe a possibilidade da média diminuir ao aumentar  $\epsilon$ , sendo mais provável para valores pequenos de  $\tau$  e  $\epsilon$ .

Daqui em diante vamos supor que  $f : \Lambda \rightarrow \Lambda$  é ergódico, então os expoentes de Lyapunov são constantes para quase todo  $x \in \Lambda$ , assim como também o limite dos ângulos médios entre subespaços de Oseledec,  $\theta_{\infty, x}^{(i, j)} = cte.$  para  $i \neq j$ .

## 7.5 Quantificador da $(\tau, \epsilon)$ -hiperbolicidade parcial relativa

Seja  $S \subseteq \Lambda$  com medida diferente de zero,  $\mu(S) > 0$ . O grau de  $(\tau, \epsilon)$ -hiperbolicidade parcial relativa do conjunto  $S \subseteq \Lambda$ , que denotamos por  $\varsigma_{\tau, \epsilon}(S)$ , é definido como

$$\varsigma_{\tau, \epsilon}(S) = \mu_S^{(\tau, \epsilon)} \frac{\overline{\varphi}(S_\tau^{(\epsilon)})}{\overline{\varphi}(S)} = \mu_S^{(\tau, \epsilon)} \overline{\varphi}_S^{(\tau, \epsilon)}, \quad (7.17)$$

Vemos que esses quantificadores dependem diretamente da relação da medida  $\mu_S^{(\tau, \epsilon)}$  e da relação das médias da função  $\varphi_{\tau, \epsilon}$  entre o conjunto  $S_\tau^{(\epsilon)}$  e o conjunto  $S$ . A  $(\tau, \epsilon)$ -hiperbolicidade parcial relativa é maior (menor) quando a média de  $\varphi_{\tau, x}$  dos pontos  $(\tau, \epsilon)$ -parcialmente hiperbólicos é maior (menor) que a média do conjunto total  $S$ . Sejam  $S$  e  $S'$  dois conjuntos de  $\Lambda$ , então

$$\varsigma_{\tau, \epsilon}(S) = \varsigma_{\tau, \epsilon}(S') \iff \mu_S^{(\tau, \epsilon)} \overline{\varphi}_S^{(\tau, \epsilon)} = \mu_{S'}^{(\tau, \epsilon)} \overline{\varphi}_{S'}^{(\tau, \epsilon)} \quad (7.18)$$

ou equivalentemente

- se  $\overline{\varphi}_S^{(\tau, \epsilon)} = \overline{\varphi}_{S'}^{(\tau, \epsilon)}$ , então  $\varsigma_{\tau, \epsilon}(S) \leq \varsigma_{\tau, \epsilon}(S')$  se e somente se  $\mu_S^{(\tau, \epsilon)} \leq \mu_{S'}^{(\tau, \epsilon)}$ .
- se  $\mu_S^{(\tau, \epsilon)} = \mu_{S'}^{(\tau, \epsilon)}$ , então  $\varsigma_{\tau, \epsilon}(S) \leq \varsigma_{\tau, \epsilon}(S')$  se e somente se  $\overline{\varphi}_S^{(\tau, \epsilon)} \leq \overline{\varphi}_{S'}^{(\tau, \epsilon)}$ .

Fixando  $\epsilon$ , para tempos assintóticos  $\tau$ , o conjunto da  $(\tau, \epsilon)$ -hiperbolicidade parcial relativa converge para um, independente do conjunto  $S \subseteq \Lambda$ .

## 7.6 Definição explícita da função $\varphi_{\tau, x}$

Neste ponto, os quantificadores foram definidos de forma geral. O ultimo que falta é definir explicitamente a função  $\varphi_{\tau, x}$  que vai caracterizar o valor do grau de  $(\tau, \epsilon)$ -hiperbolicidade parcial do ponto  $x \in \Lambda$  quando restrito à trajetória  $\{f^\tau(x)\}$ . Na definição da função  $\varphi_{\tau, x}$ , consideraremos a relação de volumes,  $h_{\tau, x}^{(i, j)}$ , a dimensão dos

subespaços de Oseledec,  $d_i = \dim E_x^{(i)}$  e o ângulo médio entre os subespaços de Oseledec,  $\theta_{\tau,x}^{(i,j)}$ . Assim, vamos considerar três diferentes funções, denotados por  $\varphi_{\tau,x}^{(1)}$ ,  $\varphi_{\tau,x}^{(2)}$  e  $\varphi_{\tau,x}^{(3)}$ , respectivamente.  $\varphi_{\tau,x}^{(1)}$  vai depender de  $h_{\tau,x}^{(i,j)}$  e  $d_i = \dim E_x^{(i)}$ ,  $\varphi_{\tau,x}^{(2)}$  vai depender unicamente dos ângulos médios e a função  $\varphi_{\tau,x}^{(3)}$  vai depender destas três observáveis.

### 7.6.1 Função um, $\varphi_{\tau,x}^{(1)}$

O primeiro caso  $\varphi_{\tau,x}^{(1)}$ , é natural considerá-la como uma função da relação das taxas de volumes (7.5), isto porque é usado no critério de hiperbolicidade parcial. Além disso, também consideramos a dimensão dos subespaços de Oseledec. Definamos a função  $\varphi_{\tau,x}^{(1)}$  da seguinte forma

$$\varphi_{\tau,x}^{(1)} = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \frac{h_{\tau,x}^{(i,j)}}{d_i + d_j} \quad (7.19)$$

onde  $h_{\tau,x}^{i,j}$  é a taxa da diferença de volumes definida na equação (7.5),  $d_i$  e  $d_j$  são as dimensões dos subespaços  $E_x^{(i)}$  e  $E_x^{(j)}$ , respectivamente. De forma geral, esta quantidade tem tanto valores positivos como negativos.

Se  $\varphi_{\tau,x}^{(1)} > 0$  então a decomposição de Oseledec é predominantemente dominada considerando pares dos subespaços de Oseledec, de forma similar, se  $\varphi_{\tau,x}^{(1)} < 0$  então os pares de subespaços de Oseledec predominantemente violam a relação de dominação parcial. A função  $\varphi_{\tau,x}^{(1)}$  pode ser escrita em termos dos FTLEs como segue

$$\varphi_{\tau,x}^{(1)} = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \frac{n_i \lambda_{\tau,x}^{(i)} - n_j \lambda_{\tau,x}^{(j)}}{n_i + n_j}. \quad (7.20)$$

Para entender melhor a expressão anterior, vamos escrevê-la na forma matricial. Definamos a seguinte matriz

$$H_{\tau,x}^{(1)} = [H_{\tau,x}^{(1)}]_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{h_{\tau,x}^{(1,1)}}{d_1+d_1} & \frac{h_{\tau,x}^{(1,2)}}{d_1+d_2} & \cdots & \frac{h_{\tau,x}^{(1,k)}}{d_1+d_k} \\ \frac{h_{\tau,x}^{(2,1)}}{d_2+d_1} & \frac{h_{\tau,x}^{(2,2)}}{d_2+d_2} & \cdots & \frac{h_{\tau,x}^{(2,k)}}{d_2+d_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{h_{\tau,x}^{(k,1)}}{d_k+d_1} & \frac{h_{\tau,x}^{(k,2)}}{d_k+d_2} & \cdots & \frac{h_{\tau,x}^{(k,k)}}{d_k+d_k} \end{bmatrix}. \quad (7.21)$$

Cada termo desta matriz relaciona propriedades entre dois subespaços de Oseledec. Vemos que a matriz é anti-simétrica, e o termos da diagonal são nulos, isto é

$$[H_{\tau,x}^{(1)}]_{ij} = -[H_{\tau,x}^{(1)}]_{ji}, \quad [H_{\tau,x}^{(1)}]_{ii} = 0. \quad (7.22)$$



Assim,  $\varphi_{\tau,x}^{(1)}$  é simplesmente a soma dos termos superiores da matriz  $H_{\tau,x}^{(1)}$ , ou equivalentemente

$$\varphi_{\tau,x}^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \left[ [H_{\tau,x}^{(1)}]_{ij} - [(H_{\tau,x}^{(1)})^T]_{ij} \right]. \quad (7.23)$$

O termo  $[H_{\tau,x}^{(1)}]_{ij}$  é proporcional a  $h_{\tau,x}^{(i,j)}$ , portanto, a sua interpretação é equivalente. Os termos da matriz ficam em função dos FTLEs como segue

$$[H_{\tau,x}^{(1)}]_{ij} = \frac{h_{\tau,x}^{(i,j)}}{d_i + d_j} = \frac{d_i \lambda_{\tau,x}^{(i)} - d_j \lambda_{\tau,x}^{(j)}}{d_i + d_j}. \quad (7.24)$$

### 7.6.2 Função dois, $\varphi_{\tau,x}^{(2)}$

Seguindo a ideia de estudar a hiperbolicidade parcial a partir dos ângulos entre os subespaços de Oseledec, vamos definir  $\varphi_{\tau,x}^{(2)}$  como sendo uma função unicamente dos ângulos médios,  $\theta_{\tau,x}^{(i,j)}$ ,  $\forall i \neq j$ .

Denotemos por  $\theta_{\tau,x} = \{ \theta_{\tau,x}^{(i,j)} | i \neq j, i, j = 1, \dots, k \}$  o conjunto de ângulos médios em  $x$  ao restrita a trajetória  $\{f^\tau(x)\}$ . Definamos  $\varphi_{\tau,x}^{(2)}$  como sendo

$$\varphi_{\tau,x}^{(2)} = \mathbb{E} [\sin \theta_{\tau,x}]. \quad (7.25)$$

Esta quantidade é mais clara, quanto maior o ângulo entre os subespaços, maior o valor de  $\varphi_{\tau,x}^{(2)}$ . Sempre é positiva no intervalo  $\varphi_{\tau,x}^{(2)} \in (0 : 1]$ .

### 7.6.3 Função três, $\varphi_{\tau,x}^{(3)}$

Para a terceira função  $\varphi_{\tau,x}^{(3)}$  serão considerados tanto os valores de  $h_{\tau,x}^{(i,j)}$ , a dimensão dos subespaços  $d_i$ , e os ângulos médios  $\theta_{\tau,x}^{(i,j)}$ . Definamos a função  $\varphi_{\tau,x}^{(3)}$  como segue

$$\varphi_{\tau,x}^{(3)} = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \frac{h_{\tau,x}^{(i,j)} \sin \theta_{\tau,x}^{i,j}}{d_i + d_j}. \quad (7.26)$$

Esta quantidade tem tanto valores positivos como negativos. De forma análoga que a primeira função, se  $\varphi_{\tau,x}^{(3)} > 0$  então a decomposição de Oseledec é predominantemente dominada considerando pares dos subespaços de Oseledec. Se  $\varphi_{\tau,x}^{(3)} < 0$  então os pares de subespaços de Oseledec violam a relação de dominação predominantemente. O valor absoluto  $|\varphi_{\tau,x}^{(3)}|$  é maior se a diferença da magnitude dos vetores depois de serem evoluídos por um tempo é maior ou ângulo médio é maior.

Também podemos levar a função em forma matricial através da seguinte matriz

$$H_{\tau,x}^{(3)} = [H_{\tau,x}^{(3)}]_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{h_{\tau,x}^{(1,1)} \sin \theta_{\tau,x}^{(1,1)}}{d_1+d_1} & \frac{h_{\tau,x}^{(1,2)} \sin \theta_{\tau,x}^{(1,2)}}{d_1+d_2} & \dots & \frac{h_{\tau,x}^{(1,k)} \sin \theta_{\tau,x}^{(1,k)}}{d_1+d_k} \\ \frac{h_{\tau,x}^{(2,1)} \sin \theta_{\tau,x}^{(2,1)}}{d_2+d_1} & \frac{h_{\tau,x}^{(2,2)} \sin \theta_{\tau,x}^{(2,2)}}{d_2+d_2} & \dots & \frac{h_{\tau,x}^{(2,k)} \sin \theta_{\tau,x}^{(2,k)}}{d_2+d_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{h_{\tau,x}^{(k,1)} \sin \theta_{\tau,x}^{(k,1)}}{d_k+d_1} & \frac{h_{\tau,x}^{(k,2)} \sin \theta_{\tau,x}^{(k,2)}}{d_k+d_2} & \dots & \frac{h_{\tau,x}^{(k,k)} \sin \theta_{\tau,x}^{(k,k)}}{d_k+d_k} \end{bmatrix}. \quad (7.27)$$

A matriz também é anti-simétrica, e o termos da diagonal são nulos, isto é

$$[H_{\tau,x}^{(3)}]_{ij} = -[H_{\tau,x}^{(3)}]_{ji}, \quad [H_{\tau,x}^{(3)}]_{ii} = 0. \quad (7.28)$$

Assim,  $\varphi_{\tau,x}^{(3)}$  é simplesmente a suma dos termos superiores da matriz  $H_{\tau,x}^{(3)}$ , ou equivalentemente

$$\varphi_{\tau,x}^{(3)} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \left[ [H_{\tau,x}^{(3)}]_{ij} - [(H_{\tau,x}^{(3)})^T]_{ij} \right]. \quad (7.29)$$

O termo  $[H_{\tau,x}^{(3)}]_{ij}$  em função dos FTLEs fica como segue

$$[H_{\tau,x}^{(3)}]_{ij} = \frac{h_{\tau,x}^{(i,j)} \sin \theta_{\tau,x}^{(i,j)}}{d_i + d_j} = \frac{(d_i \lambda_{\tau,x}^{(i)} - d_j \lambda_{\tau,x}^{(j)}) \sin \theta_{\tau,x}^{(i,j)}}{d_i + d_j}. \quad (7.30)$$

## 7.7 Quantificadores explícitos do grau da hiperbolicidade parcial

Definida a função  $\varphi_{\tau,x}$ , obtemos um conjunto de quantificadores do grau de  $(\tau, \epsilon)$ -hiperbolicidade parcial de  $x \in \Lambda$  e sobre conjuntos  $S \subseteq \Lambda$ . Dado que definimos três funções  $\varphi_{\tau,\epsilon}^{(i=1,2,3)}$ , então temos três conjuntos para quantificar o grau de  $(\tau, \epsilon)$ -hiperbolicidade parcial.

Definição: Seja  $x \in \Lambda$  um ponto  $(\tau, \epsilon)$ -parcialmente hiperbólico, então o grau de  $(\tau, \epsilon)$ -parcialmente hiperbólico de  $x \in \Lambda$  restrita na trajetória  $\{f^\tau(x)\}$  é pode ser quantificado pelas funções  $\varphi_{\tau,x}^{(1)}$ ,  $\varphi_{\tau,x}^{(2)}$  e  $\varphi_{\tau,x}^{(3)}$ . Lembrando que um ponto é  $(\tau, \epsilon)$ -parcialmente hiperbólico se  $T_x M$  tem uma decomposição de Oseledec  $(\tau, \epsilon)$ -dominada,  $h_{\tau,x}^{(i,j)} \leq \epsilon$ ,  $\forall i > j$ . Vemos que para um ponto  $(\tau, \epsilon)$ -parcialmente hiperbólico os três quantificadores locais,  $\varphi_{\tau,\epsilon}^{(1,2,3)}$  são positivos.

O grau da  $(\tau, \epsilon)$ -hiperbolicidade parcial absoluta do conjunto  $S \subset \Lambda$  é definido como

$$\vartheta_{\tau,\epsilon}^{(i)}(S) = \mu_S^{(\tau,\epsilon)} \overline{\varphi}^{(i)} = \frac{1}{\mu(S)} \int_{S^{(\epsilon)}} \varphi_{\tau,x}^{(i)} d\mu. \quad i = 1, 2, 3. \quad (7.31)$$

E finalmente, o grau da  $(\tau, \epsilon)$ -hiperbolicidade parcial relativa sobre o conjunto  $S \subseteq \Lambda$  é dado por

$$\varsigma_{\tau, \epsilon}^{(i)}(S) = \mu_S^\epsilon \frac{\overline{\varphi}_{\tau, \epsilon}^{(i)}(S_\epsilon)}{\overline{\varphi}_{\tau, \epsilon}^{(i)}(S)}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (7.32)$$

## 7.8 Quantificadores da $(\tau, \epsilon)$ -hiperbolicidade

A hiperbolicidade parcial é uma condição mais ampla do que a hiperbolicidade. Portanto, os quantificadores introduzidos, viram quantificadores do grau de  $(\tau, \epsilon)$ -hiperbolicidade nos seguintes casos.

- Se  $f : \Lambda \rightarrow \Lambda$  é um mapa e para quase todo  $x \in \Lambda$ , o espaço tangente  $T_x M$  pode ser decomposto como

$$T_x M = E_x^{(u)} \oplus E_x^{(s)}. \quad (7.33)$$

onde  $E_x^{(u)}$  é o subespaço composto pelos subespaços de Oseledec maior que zero e  $E_x^{(s)}$  é o subespaço composto pelos subespaços de Oseledec menores que zero. Então os quantificadores introduzidos são quantificadores da hiperbolicidade, em particular, da  $(\tau, \epsilon)$ -hiperbolicidade.

- Se  $f : \Lambda \rightarrow \Lambda$  é um fluxo e para quase todo  $x \in \Lambda$ , o espaço tangente  $T_x M$  pode ser decomposto como

$$T_x M = E_x^{(u)} \oplus E_x^{(c)} \oplus E_x^{(s)}. \quad (7.34)$$

onde  $E_x^{(u)}$  é o subespaço composto pelos subespaços de Oseledec maior que zero,  $E_x^{(c)}$  tem dimensão um e  $E_x^{(s)}$  é o subespaço composto pelos subespaços de Oseledec menores que zero. Então os quantificadores introduzidos são quantificadores da hiperbolicidade, em particular, da  $(\tau, \epsilon)$ -hiperbolicidade.

No que segue do capítulo, vamos aplicar esses quantificadores a dois sistemas, o sistema contínuo de Hénon-Heiles, para este sistema só definiremos explicitamente os quantificadores. O segundo sistema, o mapa padrão, vai ser estudado numericamente, obtendo mais detalhes da informação que os quantificadores podem fornecer. Nestes casos, os quantificadores de  $(\tau, \epsilon)$ -hiperbolicidade parcial são simplesmente quantificadores da  $(\tau, \epsilon)$ -hiperbolicidade.

## 7.9 Hiperbolicidade no sistema Hénon-Heiles

Como foi visto no capítulo (4), no caso do sistema de Hénon-Heiles, o espectro de Lyapunov é composto por três expoentes de Lyapunov,  $\lambda_x^{(1)} = \lambda$ ,  $\lambda_x^{(2)} = 0$  e  $\lambda_x^{(3)} = -\lambda$ . Os três subespaços de Oseledec,  $E_x^{(u)}$ ,  $E_x^{(c)}$  e  $E_x^{(s)}$ , tem dimensão  $d_u = 1$ ,  $d_s = 1$  e  $d_c = 2$ , respectivamente.

Aplicando a relação de expansão de volumes para o sistema Hénon-Heiles (7.5), obtemos as seguintes três quantidades em termos dos FTLEs

$$h_{\tau,x}^{(u,c)} = \lambda_{\tau,x}^{(u)} - 2\lambda_{\tau,x}^{(c)}, \quad h_{\tau,x}^{(u,s)} = \lambda_{\tau,x}^{(u)} - \lambda_{\tau,x}^{(s)}, \quad h_{\tau,x}^{(c,s)} = 2\lambda_{\tau,x}^{(c)} - \lambda_{\tau,x}^{(s)}. \quad (7.35)$$

Um ponto  $x \in \Lambda$  no sistema de Hénon-Heiles é  $(\tau, \epsilon)$ -hiperbólico restrito à trajetória  $\{f^\tau(x)\}$  se

$$\min \left\{ e^{-\tau h_{\tau,x}^{(u,c)}}, e^{-\tau h_{\tau,x}^{(u,s)}}, e^{-\tau h_{\tau,x}^{(c,s)}} \right\} \leq \epsilon. \quad (7.36)$$

Se  $x \in \Lambda$  é  $(\tau, \epsilon)$ -hiperbólico, então o seu grau de  $(\tau, \epsilon)$ -hiperbolicidade considerando o quantificador  $\varphi_{\tau,x}^{(1)}$ .

$$\begin{aligned} \varphi_{\tau,x}^{(1)} &= \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \frac{h_{\tau,x}^{(i,j)}}{d_i + d_j} = \sum_{j=2}^3 \frac{h_{\tau,x}^{(1,j)}}{1 + d_j} + \frac{h_{\tau,x}^{(2,3)}}{3} = \left( \frac{h_{\tau,x}^{(1,2)}}{3} + \frac{h_{\tau,x}^{(1,3)}}{2} + \frac{h_{\tau,x}^{(2,3)}}{3} \right) \\ &= \frac{2\lambda_{\tau,x}^{(u)} - 4\lambda_{\tau,x}^{(c)} + 3\lambda_{\tau,x}^{(u)} - 3\lambda_{\tau,x}^{(s)} + 4\lambda_{\tau,x}^{(c)} - 2\lambda_{\tau,x}^{(s)}}{6} = \frac{5(\lambda_{\tau,x}^{(u)} - \lambda_{\tau,x}^{(s)})}{6}, \end{aligned} \quad (7.37)$$

onde os índices 1 – 3 estão relacionados aos subespaços instável, central e estável, respectivamente, e  $d_1, d_2$  e  $d_3$  são as dimensões dos subespaços instável, central e estável, respectivamente. Considerando o quantificador  $\varphi_{\tau,x}^{(2)}$

$$\begin{aligned} \varphi_{\tau,x}^{(2)} &= \mathbb{E} [\sin \Theta_{\tau,x}^{(i,j)}] = \frac{\sin \Theta_{\tau,x}^{(u,c)} + \sin \Theta_{\tau,x}^{(u,s)} + \sin \Theta_{\tau,x}^{(c,s)}}{3} \\ &= \frac{2 \sin \Omega_{\tau,x} + \sin \Theta_{\tau,x}}{3}. \end{aligned} \quad (7.38)$$

E considerando o quantificador  $\varphi_{\tau,x}^{(3)}$

$$\begin{aligned} \varphi_{\tau,x}^{(3)} &= - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \frac{h_{\tau,x}^{(i,j)} \sin \Theta_{\tau,x}^{(i,j)}}{d_i + d_j} \\ &= \frac{h_{\tau,x}^{(1,2)} \sin \Theta_{\tau,x}^{(1,2)}}{3} + \frac{h_{\tau,x}^{(1,3)} \sin \Theta_{\tau,x}^{(1,3)}}{2} + \frac{h_{\tau,x}^{(2,3)} \sin \Theta_{\tau,x}^{(2,3)}}{3} \\ &= \frac{1}{6} [2(h_{\tau,x}^{(1,2)} + h_{\tau,x}^{(2,3)}) \sin \Omega_{\tau,x} + 3h_{\tau,x}^{(1,3)} \sin \Theta_{\tau,x}] \\ &= \frac{1}{6} [2(\lambda_{\tau,x}^{(1)} - 2\lambda_{\tau,x}^{(2)} + 2\lambda_{\tau,x}^{(2)} - \lambda_{\tau,x}^{(3)}) \sin \Omega_{\tau,x} + 3(\lambda_{\tau,x}^{(1)} - \lambda_{\tau,x}^{(3)}) \sin \Theta_{\tau,x}] \\ &= \frac{1}{6} [2(\lambda_{\tau,x}^{(1)} - \lambda_{\tau,x}^{(3)}) \sin \Omega_{\tau,x} + 3(\lambda_{\tau,x}^{(1)} - \lambda_{\tau,x}^{(3)}) \sin \Theta_{\tau,x}] \\ &= \frac{1}{6} (\lambda_{\tau,x}^{(1)} - \lambda_{\tau,x}^{(3)}) [2 \sin \Omega_{\tau,x} + 3 \sin \Theta_{\tau,x}]. \end{aligned} \quad (7.39)$$

Resumindo

$$\begin{aligned} \varphi_{\tau,x}^{(1)} &= \frac{5\lambda_{\tau,x}^{(u)} - 5\lambda_{\tau,x}^{(s)}}{6}, \quad \varphi_{\tau,x}^{(2)} = \frac{2 \sin \Omega_{\tau,x} + \sin \Theta_{\tau,x}}{3}, \\ \varphi_{\tau,x}^{(3)} &= \frac{(\lambda_{\tau,x}^{(1)} - \lambda_{\tau,x}^{(3)}) [2 \sin \Omega_{\tau,x} + 3 \sin \Theta_{\tau,x}]}{6}. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Os valores assintóticos ficam

$$\varphi_{\infty,x}^{(1)} = \frac{5\lambda}{3}, \quad \varphi_{\infty,x}^{(2)} = \frac{2\sin\Omega + \sin\Theta}{3}, \quad \varphi_{\infty,x}^{(3)} = \frac{2\lambda\sin\Omega + 3\lambda\sin\Theta}{3}. \quad (7.41)$$

A partir destas medidas de  $(\tau, \epsilon)$ -hiperbolicidade local, as medidas sob conjuntos podem ser definidas explicitamente usando as equações da seção (7.7) para os quantificadores da  $(\tau, \epsilon)$ -hiperbolicidade absoluta e relativa sobre conjuntos no sistema de Hénon-Heiles.

## 7.10 Hiperbolicidade no mapa padrão

Na continuação apresentamos os resultados numéricos dos quantificadores do grau da  $(\tau, \epsilon)$ -hiperbolicidade aplicados ao mapa padrão. Na seção (4.8) vimos que o teorema de Oseledec nos permite dividir o espaço de fase do mapa padrão em regiões segundo a sua decomposição de Oseledec do fibrado tangente.

- (1) Regiões regulares ou ilhas de regularidade,  $\Omega$ . Um ponto do espaço de fase  $x \in M$  pertence à região  $\Omega$  se a sua decomposição é trivial, e portanto, com espectro de Lyapunov trivial.
- (2) Regiões caóticas,  $\Lambda$ . Um ponto do espaço de fase  $x \in M$  pertence a  $\Lambda$  se o correspondente espaço tangente,  $T_x M$  pode ser decomposto num espaço que expande assintoticamente com expoente de Lyapunov  $\lambda$  e um subespaço de Oseledec que contrai assintoticamente com expoente de Lyapunov  $-\lambda$ .

Além disso, a região caótica pode ser decomposta em regiões desconectadas e invariantes com a aplicação do mapa. Seja  $f : M \rightarrow M$  a aplicação do *mapa padrão* com parâmetro não linear  $k > 0$ , considerando a decomposição do espaço de fase em regiões caóticas e regiões regulares  $M \equiv \Lambda \cup \Omega$ . A região caótica pode ser decomposta em subconjuntos invariantes de  $f$ , ou seja

$$\Lambda = \bigcup_i \Lambda^{(i)}, \quad \Lambda^{(i)} \cap \Lambda^{(j)} = \{\emptyset\}, \quad (7.42)$$

onde a invariância é dada por

$$f^t(\Lambda^{(i)}) = \Lambda^{(i)}, \quad f^t(\Lambda^{(i)}) \cap f^{t'}(\Lambda^{(i)}) = \{\emptyset\}, \quad \forall t, t' \quad (7.43)$$

A medida de Lebesgue (área no espaço de fase) cumpre que

$$\mu(\Lambda) = \sum_i \mu(\Lambda^{(i)}) \quad (7.44)$$

onde  $\mu(\Lambda^{(i)})$  é equivalente a área do conjunto  $\Lambda^{(i)}$  no espaço de fase. A seguir normalizamos estas medidas para cada região desconectada.

## 7.11 Medida de probabilidade total para $\Lambda^{(i)}$

As definições dos quantificadores da  $(\tau, \epsilon)$ -hiperbolicidade foram definidas para conjuntos invariantes com medida de probabilidade total, porém, temos que  $\mu(\Lambda^{(i)}) \neq 1$ . Para solucionar isto, basta encontrar uma medida  $\mu^{(i)}$  para cada região caótica. A mais natural é considerar a renormalização de  $\mu$  para cada um dos conjuntos  $\Lambda^{(i)}$ . Seja  $S \subseteq \Lambda^{(i)} \subseteq M$ , então

$$\mu^{(i)}(S) = \frac{\mu(S)}{\mu(\Lambda^{(i)})} \quad \rightarrow \quad \mu^{(i)}(\Lambda^{(i)}) = 1. \quad (7.45)$$

Com esta medida de probabilidade total, as medidas de  $(\tau, \epsilon)$ -hiperbolicidade introduzidas no capítulo anterior podem ser aplicadas a qualquer região caótica  $\Lambda_{k < k_c}^{(i)}$ . Para valores do parâmetro não linear no *caos local* ( $k < k_c$ ), cada um das regiões caóticas desconectadas gera um conjunto,  $\Lambda^{(i)}$ , com  $\mu(\Lambda^{(i)}) > 0$ , enquanto para valores de *caos global*, ( $k > k_c$ ), existe uma região caótica principal  $\Lambda_{k > k_c}$  onde  $\mu(\Lambda_{k > k_c}) \rightarrow 1$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Por simplicidade, denotaremos simplesmente como  $\mu$  para qualquer conjunto, lembrando que esta medida depende de cada conjunto a ser considerado. A medida de Lebesgue do conjunto  $A$ ,  $\mu(A)$ , será chamada de área de  $A$ .

## 7.12 Quantificadores da hiperbolicidade para o mapa padrão

*Definição.* Seja  $f : M \rightarrow M$  a aplicação do mapa padrão, seja  $\epsilon \geq 1/2$  e  $x \in \Lambda$  tal que  $T_x M$  permite uma decomposição de Oseledec, então dizemos que  $x$  é  $(\tau, \epsilon)$ -hiperbólico restrita na trajetória  $\{f^\tau(x)\}$  se

$$\frac{\|D_x f^\tau v_x^{(s)}\|}{\|D_x f^\tau v_x^{(u)}\|} \leq \epsilon, \quad (7.46)$$

onde  $v_x^{(s)} \in E_x^{(s)}$ ,  $v_x^{(u)} \in E_x^{(u)}$ . Sendo  $\lambda_{\tau, x}^{(s)}$  e  $\lambda_{\tau, x}^{(u)}$  os FTLEs, a desigualdade (7.46) levado em termos da relação de volumes é

$$e^{-\tau h_{\tau, x}} = e^{-\tau(\lambda_{\tau, x}^{(u)} - \lambda_{\tau, x}^{(s)})} \leq \epsilon, \quad (7.47)$$

onde  $h_{\tau, x}^{(u, s)} = h_{\tau, x}$  é a taxa da relação de volumes ou neste caso a diferença dos FTLEs. Para o calculo dos quantificadores da hiperbolicidade parcial no mapa padrão, consideramos só o caso para  $\epsilon = 1/2$ . Chamaremos de  $\tau$ -hiperbolicidade à  $(\tau, 1/2)$ -hiperbolicidade restrita na trajetória  $\{f^\tau(x)\}$ . Assim como também, os pontos  $(\tau, 1/2)$ -parcialmente hiperbólicos serão chamados de pontos  $\tau$ -hiperbólicos e o conjunto  $S_\tau^{(1/2)}$  a relação da área  $\mu_S^{(\tau, 1/2)}$  serão denotados por  $S_\tau$  e  $\mu_S^\tau$ , respectivamente. Aplicando as funções introduzidas nas seções (7.6.1)-(7.6.3), obtemos os seguintes quantificadores explícitos da  $\tau$ -hiperbolicidade local do ponto  $x \in \Lambda$  para o mapa padrão:

$$\varphi_{\tau, x}^{(1)} = \frac{h_{\tau, x}}{2}, \quad \varphi_{\tau, x}^{(2)} = \sin(\theta_{\tau, x}), \quad \varphi_{\tau, x}^{(3)} = \frac{h_{\tau, x} \sin(\theta_{\tau, x})}{2}. \quad (7.48)$$

E em consequência, os quantificadores da  $\tau$ -hiperbolicidade absolutas ( $\tau$ -HA) e  $\tau$ -hiperbolicidade relativa ( $\tau$ -HR) para conjuntos  $S \subseteq \Lambda$  também estarão definidos, e serão denotados por  $\vartheta_\tau^{(i=1,2,3)}$  e  $\varsigma_\tau^{(i=1,2,3)}$ , respectivamente. Os conjuntos de  $S \subseteq \Lambda$  serão chamados de regiões caóticas.

### 7.13 Resultados da $\tau$ -hiperbolicidade para o conjunto total

Consideremos primeiramente que  $S \equiv \Lambda$  para estudar numericamente os diferentes quantificadores da  $\tau$ -hiperbolicidade, ou seja, a  $\tau$ -hiperbolicidade da região total  $\Lambda$ , com área normalizada  $\mu(\Lambda) = 1$ .

Dado um valor do parâmetro não linear  $k$ , vamos focar o estudo da  $\tau$ -hiperbolicidade na região caótica principal, isto é, na região caótica com maior área no espaço de fase. Este estudo será feito em função do parâmetro  $k$  e da janela temporal  $\tau$ .

Assim, para  $\Lambda$  as medidas  $\tau$ -HA e  $\tau$ -HR ficam

$$\tilde{\vartheta}_\tau^{(i)} = \mu_\Lambda^\tau \overline{\varphi}_\tau^{(i)}(\Lambda_\tau), \quad \tilde{\varsigma}_\tau^{(i)} = \mu_\Lambda^\tau \frac{\overline{\varphi}_\tau^{(i)}(\Lambda_\tau)}{\overline{\varphi}_\tau^{(i)}(\Lambda)}. \quad (7.49)$$

Nas Figs. 47(a)-47(c) são mostradas as regiões caóticas principais,  $\Lambda$ , para três diferentes valores do parâmetro não linear: (a)  $k = 0,55$ , (b)  $k = 1,25$  e (c)  $k = 5,0$ . Nas Figs. 47(d)-47(f) são mostrados os conjuntos  $\Lambda_1$ , isto é, os correspondentes conjuntos de pontos que são 1-hiperbólicos em  $\Lambda$ . A cor preta representam os pontos que não são 1-hiperbólicos. Vemos que pontos em torno do ponto periódico hiperbólico  $(\pi, 0)$  sempre são pontos de  $\Lambda_1$ .

As Figs. 47(g)-47(i) mostram a relação entre a área  $\mu(\Lambda_\tau)$  e  $\mu(\Lambda)$  em função do tempo  $\tau$ . Como é esperado, à medida que o tempo vai aumentando, a área do conjunto  $\mu(\Lambda_\tau)$  vai sendo igual à área de  $\mu(\Lambda) = 1$ , sendo mais rápida esta convergência para valores grandes de  $k$ .



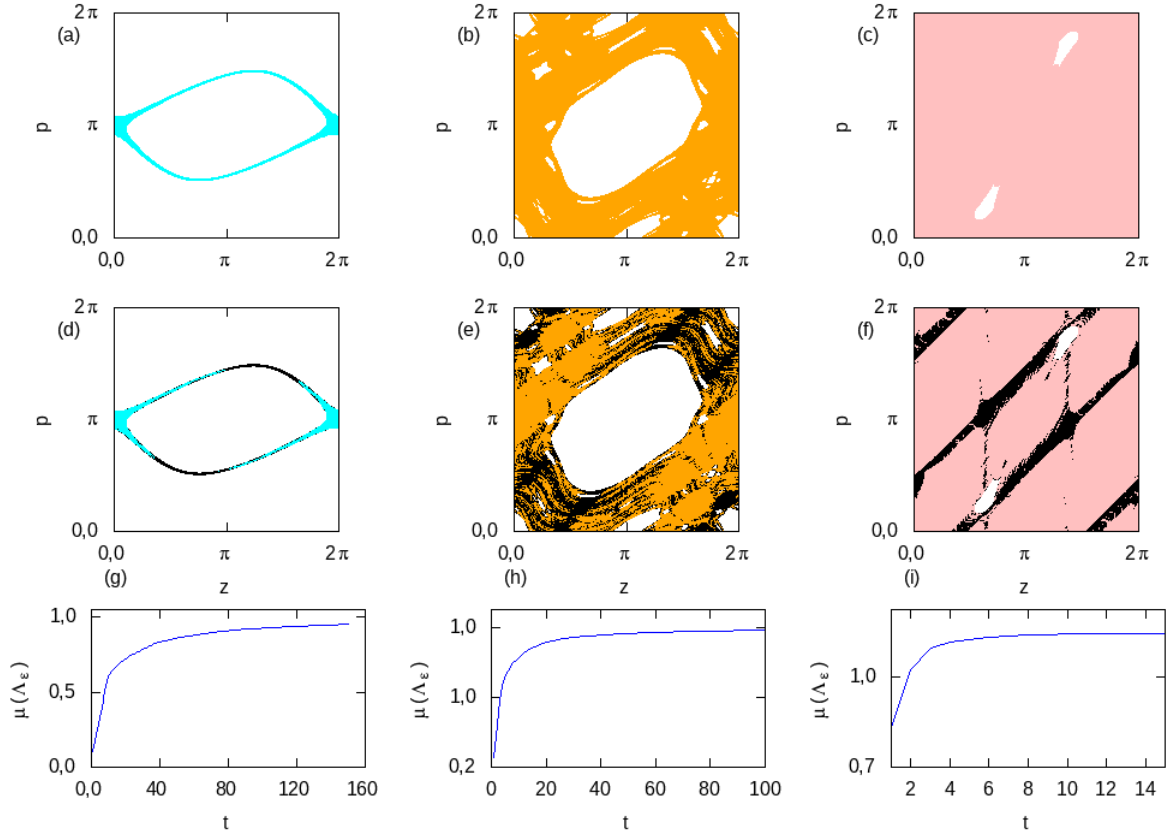


Figura 47 – De esquerda para a direita  $k = 0,55$ ,  $k = 1,25$  e  $k = 5,0$ . (a-c) região principal  $\Lambda$  no espaço de fase, (d-f) região 1-hiperbólico  $\Lambda_{\epsilon=1/2} \subseteq \Lambda$  e (g-i) proporção de área entre o conjunto  $\Lambda_{\epsilon=1/2}$  e  $\Lambda$ ,  $\mu_{\Lambda}^{\epsilon} = \mu(\Lambda_{\epsilon})/\mu(\Lambda)$ , em função de  $\tau$ .

**$\tau$ -hiperbolicidade de  $\Lambda$  em função de  $\tau$ .** O comportamento da  $\tau$ -HA e a  $\tau$ -HR para a região total  $\Lambda$  são os mesmos, salvo uma constante. Isto pode ser visto da equação (7.49)

$$\zeta_{\tau}^{(i)} = \frac{\mu_{\Lambda}^{\tau} \overline{\varphi}_{\tau}^{(i)}(\Lambda_{\tau})}{\overline{\varphi}_{\tau}^{(i)}(\Lambda)} = \frac{\vartheta_{\tau}^{(i)}}{\overline{\varphi}_{\tau}^{(i)}(\Lambda)} = \frac{\tilde{\vartheta}_{\tau}^{(i)}}{\varphi_{\infty,x}^{(i)}}, \quad \forall \tau \quad (7.50)$$

onde  $\varphi_{\infty,x}^{(i)} = \text{constante}$  para o mapa padrão. Com a diferença de que o valor assintótico convergirá para  $\varphi_{\infty,x}^{(i=1,2,3)}$  nos quantificadores da  $\tau$ -HA, enquanto o valor assintótico da  $\tau$ -HR é 1 para os três casos.

Estudemos o comportamento da primeira medida  $\varphi_{\tau,x}^{(1)} = h_{\tau,x}/2$  para diferentes valores do parâmetro não linear. Na primeira linha da Fig. 48 são mostrados os valores para  $k = 0,55$  (cor preta),  $k = 0,90$  (cor verde) e  $k = 1,25$  (cor azul), enquanto a segunda linha os resultados correspondem para os valores  $k = 2,50$  (cor vermelho),  $k = 5,0$  (cor amarelo) e  $k = 10,00$  (cor café). A primeira coluna corresponde aos resultados da  $\tau$ -HA,  $\tilde{\vartheta}_{\tau}(\Lambda)$ , e a segunda coluna os resultados para a  $\tau$ -HR,  $\zeta_{\tau}(\Lambda)$ .

Para tempos grandes  $\tau \gg 1$ , o valor de  $\tilde{\vartheta}_{\tau}^{(1)}$  converge ao valor do expoente de Lyapunov maior  $\lambda$ , esse valor é mostrado em linha contínua nas Figs. 48(a) e 48(c).

Podemos concluir então que o valor assintótico da  $\tau$ -HA cresce com o parâmetro não linear  $k$ , enquanto o valor assintótico de  $\zeta_\tau^{(1)}$  é 1 para qualquer valor de  $k$ .

Dado que o comportamento é similar, a análise para valores menores de  $k$  será feito no quantificador da  $\tau$ -HR. Vemos que para os menores valores de  $\tau$  e  $k$ , o valor da  $\tau$ -hiperbolicidade é menor que o valor assintótico, ultrapassando este valor quando  $\tau$  aumenta e convergindo ao valor 1 para  $\tau \rightarrow \infty$ , ver Figs. 48(a)-48(b); Quanto maior o valor de  $k$ , o valor inicial da  $\tau$ -HR vai aumentando até ultrapassar o valor de 1. Para valores ainda maiores de  $k$  o valor da  $\tau$ -HR é maior que o valor assintótico 1 para todo  $\tau$ , ver 48(c)-48(d). Para todo valor de  $k$ , o valor da  $\tau$ -HR e da  $\tau$ -HA do conjunto total  $\Lambda$  convergira por acime deste.

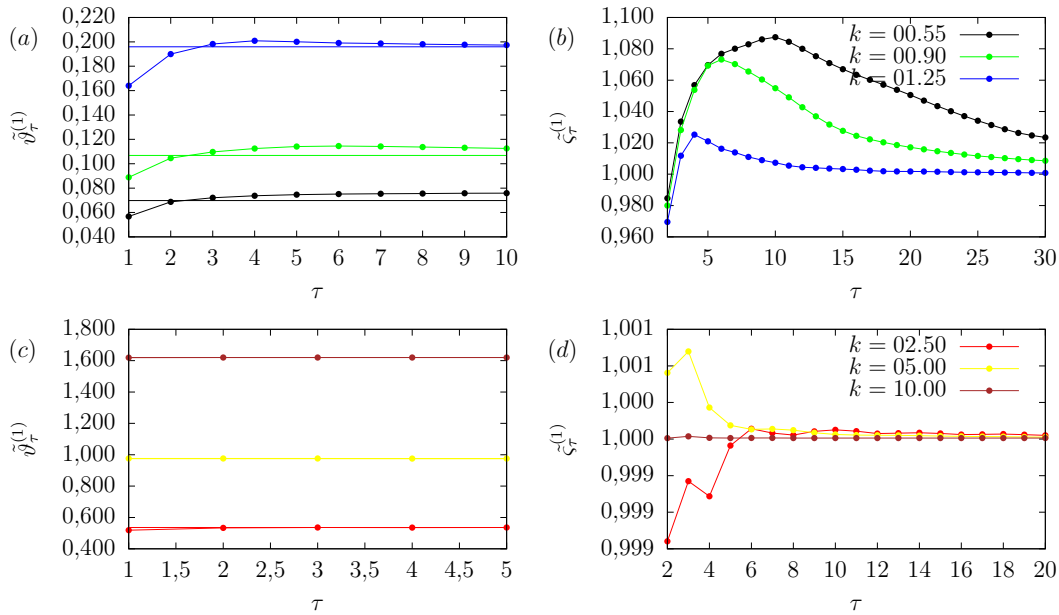


Figura 48 –  $(\tau, \frac{1}{2})$ -hiperbolicidade usando  $\varphi_{\tau,x}^{(1)} = h_{\tau,x}/2$ . (a)  $\tilde{\vartheta}_\tau^{(1)}(\Lambda)$  para  $k = 0,55$ ,  $k = 0,90$  e  $k = 1,25$ ; (b)  $\tilde{\zeta}_\tau^{(1)}(\Lambda)$  para  $k = 0,55$ ,  $k = 0,90$  e  $k = 1,25$ ; (c)  $\tilde{\vartheta}_\tau^{(1)}(\Lambda)$  para  $k = 2,50$ ,  $k = 5,00$  e  $k = 10,00$ ; (d)  $\tilde{\zeta}_\tau^{(1)}(\Lambda)$  para  $k = 2,50$ ,  $k = 5,00$  e  $k = 10,00$ .

Com o objetivo de explicar os resultados, podemos demonstrar que

$$\overline{\varphi}_\tau^{(1)}(\Lambda_\tau^{(1/2)}) \geq \overline{\varphi}_\tau^{(1)}(\Lambda) = \varphi_{\infty,x}^{(1)} = \lambda, \quad (7.51)$$

isto porque o valor  $\varphi_{\tau,x}^{(1)}$  é sempre maior para um ponto  $\tau$ -hiperbólico se comparado com um ponto não  $\tau$ -hiperbólico. Assim, observando as Figs. 47(g)-47(i), podemos ver que a  $\tau$ -hiperbolicidade para valores de  $\tau$  e  $k$  pequenos é menor que o valor assintótico porque a relação das áreas  $\mu_\Lambda^\tau$  ainda é menor que o valor médio  $\overline{\varphi}_\tau^{(1)}(\Lambda_\tau)$ . Para  $k > 2,5$ , a relação  $\mu_\Lambda^\tau \approx 1$ , portanto a  $\tau$ -hiperbolicidade ficará acima do valor assintótico pois (7.51) é satisfeita.

Para a segunda medida que só depende do ângulo médio, a  $\tau$ -HA e  $\tau$ -HR são mostradas na Fig. 49, tendo o mesmo formato que a Fig. 48. Vemos que o valor assintótico

para  $\vartheta_\tau^{(2)}$  é  $\sin \theta_{\infty, x} \equiv \sin \theta$  independente do ponto  $x \in \Lambda$ , enquanto  $\tilde{\vartheta}_\tau^{(2)}$  vai para 1. Para  $k$  pequenos, Fig. 49(a), vemos que enquanto menor o valor de  $k$ , menor o valor assintótico de  $\tilde{\vartheta}_\tau^{(2)}$ ; para valores grandes de  $k$  o valor assintótico fica ao redor de  $\sin(\pi/4)$ . A convergência é mais rápida quando  $k$  é maior.

Vemos que  $\tilde{\vartheta}_\tau^{(2)}$  e  $\tilde{\zeta}_\tau^{(2)}$  sempre são menores para todos valores de  $k$  e  $\tau$ , e crescendo monotonicamente enquanto  $\tau$  aumenta. Este comportamento é similar ao comportamento da relação das áreas  $\mu_\Lambda^\tau$ , o que pode indicar que tanto para pontos  $\tau$ -hiperbólicos como para não  $\tau$ -hiperbólicos, podem ter qualquer valor de ângulo médio. Isto vai ser estudado com maior detalhe na seguinte seção.

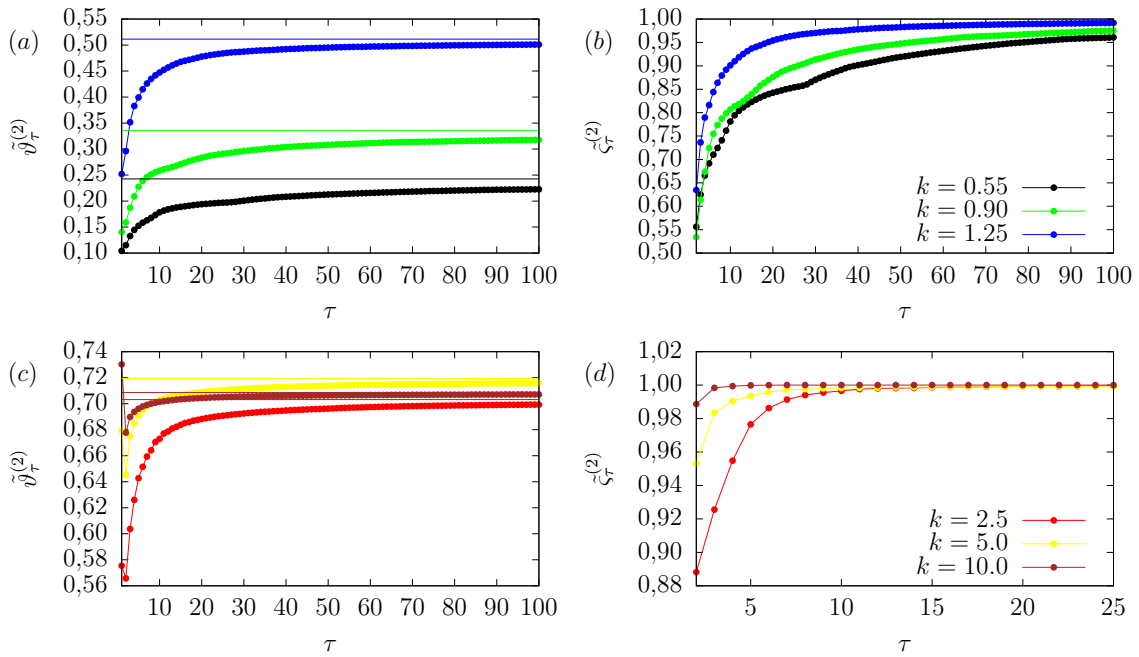


Figura 49 –  $(\tau, \frac{1}{2})$ -hiperbolicidade usando  $\varphi_{\tau, x}^{(2)} = \sin \theta_{\tau, x}$ . (a)  $\tilde{\vartheta}_\tau^{(2)}(\Lambda)$  para  $k = 0,55$ ,  $k = 0,90$  e  $k = 1,25$ ; (b)  $\tilde{\zeta}_\tau^{(2)}(\Lambda)$  para  $k = 0,55$ ,  $k = 0,90$  e  $k = 1,25$ ; (c)  $\tilde{\vartheta}_\tau^{(2)}(\Lambda)$  para  $k = 2,50$ ,  $k = 5,00$  e  $k = 10,00$ ; (d)  $\tilde{\zeta}_\tau^{(2)}(\Lambda)$  para  $k = 2,50$ ,  $k = 5,00$  e  $k = 10,00$ .

De forma similar, na Fig. 50 são mostrados os resultados para seis valores de  $k$ , para os últimos quantificadores  $\tilde{\vartheta}_\tau^{(3)}$  e  $\tilde{\zeta}_\tau^{(3)}$ , que dependem tanto do valor de  $h_{\tau, x}$  como do ângulo médio  $\theta_{\tau, x}$ . Neste caso  $\tilde{\vartheta}_\infty^{(3)} = \lambda \sin \theta$  e novamente, a convergência é mais rápida quando  $k$  é maior.

Para todo valor de  $k$ , a  $\tau$ -hiperbolicidade fica acima do valor assintótico. Para  $k$  pequenos observamos que a  $\tau$ -hiperbolicidade alcança um máximo, tendo valores significativamente maiores que o valor assintótico. Uma possível explicação pode ser obtida a partir da Fig. 23, onde vemos que para  $\tau = 1$  a probabilidade de obter ângulos próximos a zero é maior quando o valor absolutos de  $h_{1, x}$  é menor. O que pode indicar que para pontos  $\tau$ -hiperbólicos, o produto de  $h_{\tau, x}$  com  $\sin \theta_{\tau, x}$  é em média maior que para pontos não  $\tau$ -hiperbólicos.

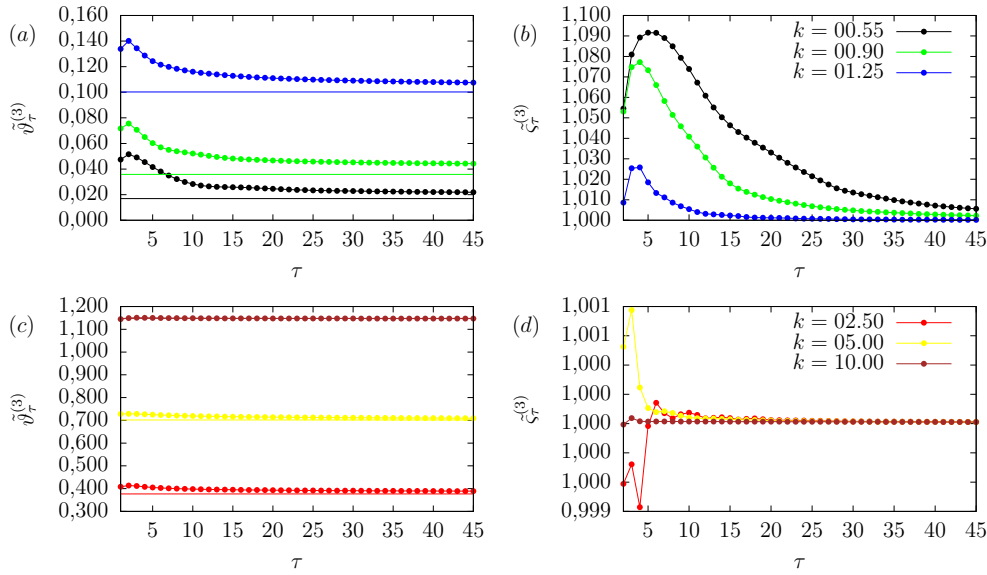


Figura 50 –  $(\tau, \frac{1}{2})$ -hiperbolicidade usando  $\varphi_{\tau,x}^{(3)} = h_{\tau,x} \sin \theta_{\tau,x}/2$ . (a)  $\tilde{\vartheta}_\tau^{(3)}(\Lambda)$  para  $k = 0,55$ ,  $k = 0,90$  e  $k = 1,25$ ; (b)  $\tilde{\zeta}_\tau^{(3)}(\Lambda)$  para  $k = 0,55$ ,  $k = 0,90$  e  $k = 1,25$ ; (c)  $\tilde{\vartheta}_\tau^{(3)}(\Lambda)$  para  $k = 2,50$ ,  $k = 5,00$  e  $k = 10,00$ ; (d)  $\tilde{\zeta}_\tau^{(3)}(\Lambda)$  para  $k = 2,50$ ,  $k = 5,00$  e  $k = 10,00$ .

## 7.14 Resultados da $\tau$ -hiperbolicidade para regiões com $\mu(S) < 1$

Uma das principais motivações de obter quantificadores da  $\tau$ -hiperbolicidade é poder diferenciar diferentes dinâmicas dentro de uma região caótica desconectada  $\Lambda$ . Nesta seção verificamos que os nossos quantificadores da  $\tau$ -hiperbolicidade são sensíveis a diferentes comportamentos, assim como também, analisamos como é o comportamento destes para diferentes regiões onde espera-se dinâmicas diferentes. Para isto, estudamos a  $\tau$ -hiperbolicidade de regiões próximas a pontos periódicos hiperbólicos (PPH) e de regiões em torno de ilhas de regularidade.

Fixamos o valor do parâmetro não linear  $k = 1,25$ . Dividiremos essa análise em duas partes, a primeira parte estudaremos como a  $\tau$ -hiperbolicidade depende de uma região, a outra em função da proximidade do ponto periódico hiperbólico  $(\pi, 0)$ . A região mais próxima ao ponto será denotada por  $S_v$ , enquanto a região mais afastada será denotada por  $S_a$ . Estas regiões estão representadas nas cores verde e azul respectivamente na Fig. 51. A cor roxa é parte da região caótica  $\Lambda$  e as ilhas de regularidade estão em cor branca.

Na segunda parte, nós escolhemos duas regiões cujos pontos estão em torno de ilhas de regularidade, com isto estudamos a influência destas sobre a  $\tau$ -hiperbolicidade. As regiões escolhidas são mostradas na Fig. 51, a região de cor rosa, denotada por  $S_r$  é influenciada por 4 ilhas relevantes. Enquanto a região de cor ciano, denotada por  $S_c$ , é influenciada por duas ilhas maiores, mais um conjunto de ilhas de área menor.

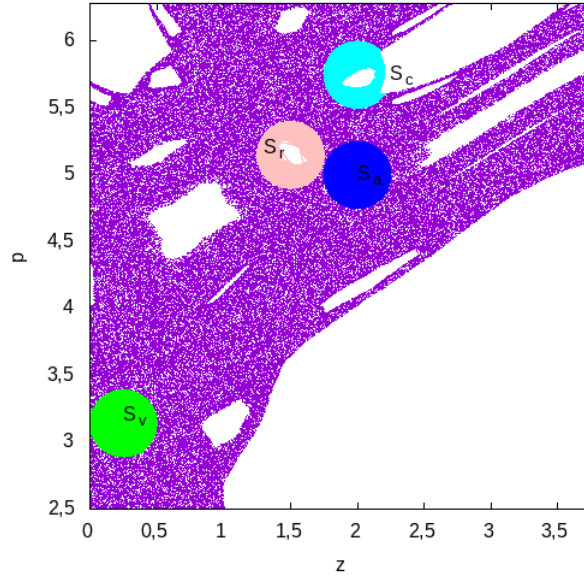


Figura 51 – Espaço de fase para  $k = 1,25$  e localização das regiões  $S_v$  cor verde,  $S_a$  cor azul,  $S_r$  cor rosa e  $S_c$  cor ciano.

Nas Figs. 52(a)-52(d) mostramos a geometria de  $h_{1,x}$ , o que nos dá uma ideia dos pontos que podem ser 1-hiperbólicos. Observamos que as regiões  $S_v$  (Fig. 52(a)) e  $S_a$  (Fig. 52(b)) apresentam mais pontos 1-hiperbólicos, sendo estas regiões com pouca influencia das ilhas. Enquanto as regiões com menos pontos 1-hiperbólicos são as regiões  $S_r$  (Fig. 52(c)) e  $S_c$  (Fig. 52(d)), próximas a ilhas de regularidade. Isto é confirmado na Fig. 53, onde a proporção de ponto  $\tau$ -hiperbólicos,  $\mu_S^\tau$ , em função de  $\tau$  são exibidas.

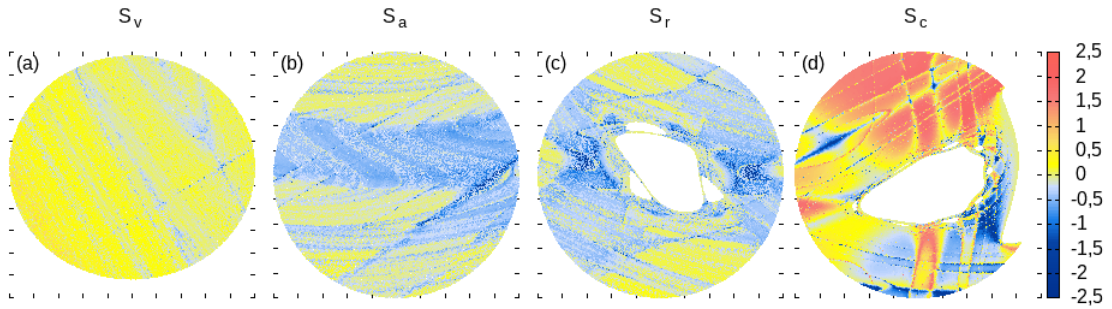
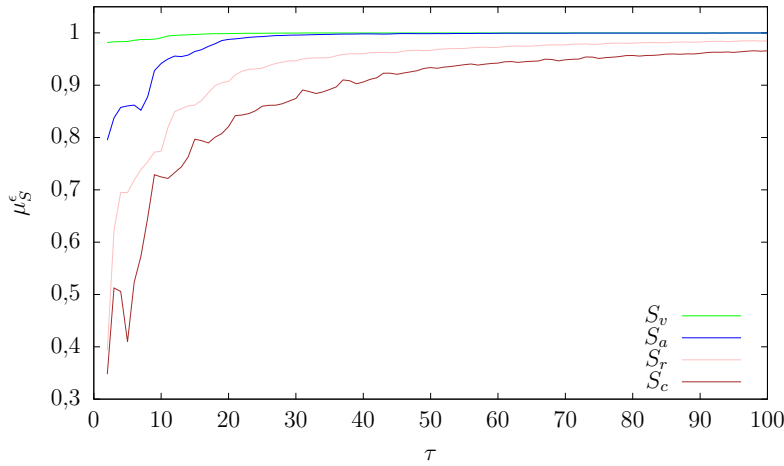


Figura 52 – Valor de  $h_{1,x}$  em cada um das regiões mostradas: (a)  $S_v$ , (b)  $S_a$ , (c)  $S_r$  e (d)  $S_c$ .

Vemos que a quantidade de pontos  $\tau$ -hiperbólicos depende fortemente da localização da região. Sendo a região  $S_v$  com maior pontos para qualquer  $\tau$ , próximo ao ponto periódico hiperbólico  $(\pi, 0)$ , enquanto a região  $S_c$  tem a menor quantidade de pontos  $\tau$ -hiperbólicos, sendo esta a região localizada em torno de um número maior de ilhas de regularidade. Também podemos observar que os valores com a maior magnitude de  $h_{1,x}$  encontram-se nas regiões em torno das ilhas de regularidade,  $S_r$  e  $S_c$ , bem como a sua geometria é mais complexa que nas regiões  $S_v$  e  $S_a$ .

Figura 53 – Proporção de área,  $\mu_s^\epsilon$ , entre as regiões  $S$  e  $S_\epsilon$ .

Como foi observado, o valor assintótico da  $\tau$ -hiperbolicidade é independente da região para o mapa padrão, isto porque o valor de  $h_{\tau,x}$  e  $\theta_{\tau,x}$  são independentes da condição inicial  $x \in \Lambda$ . Assim, o grau da  $\tau$ -HA para o mapa padrão é

$$\vartheta_\infty^{(1)}(S) = \lambda, \quad \vartheta_\infty^{(2)}(S) = \sin \theta, \quad \vartheta_\infty^{(3)}(S) = \lambda \sin \theta, \quad (7.52)$$

para todo  $\epsilon$ , e para todo  $S \subseteq \Lambda$ . O valor do grau da  $(\infty, \epsilon)$ -HR é igual a 1 para qualquer quantificador. Para um valor de  $k = 1,25$ , as simulações mostram que

$$\vartheta_\infty^{(1)}(S) \approx 0,198, \quad \vartheta_\infty^{(2)}(S) \approx 0,511, \quad \vartheta_\infty^{(3)}(S) \approx 0,1011. \quad (7.53)$$

#### 7.14.1 $\tau$ -hiperbolicidade em função da distância a PPH

Nesta seção estudaremos numericamente como é o comportamento dos quantificadores da  $\tau$ -hiperbolicidade para as duas regiões  $S_v$  e  $S_a$ , colocadas a diferentes distâncias do PPH  $(\pi, 0)$ .

Na Fig. 54 podemos encontrar os resultados da  $\tau$ -HA da região  $S_v$  (cor verde) e  $S_a$  (cor azul), as linhas em cor preta são os valores assintóticos. Na Fig. 54(a) encontramos os resultados para o quantificador,  $\vartheta_\tau^{(1)}(S)$ , na Fig. 54(b) os resultados de  $\vartheta_\tau^{(2)}(S)$  e na Fig. 54(c) para o quantificador  $\vartheta_\tau^{(3)}(S)$ . Podemos observar que a  $\tau$ -HA é maior na região  $S_v$  que na região  $S_a$  para todo  $\tau = [0 : 100]$  nos três casos.

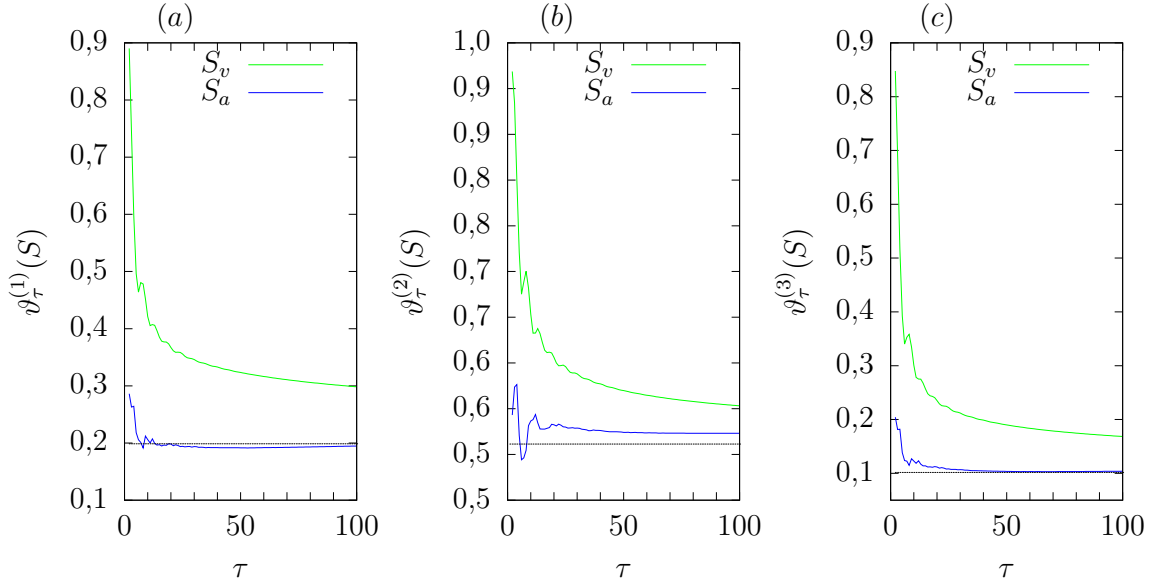


Figura 54 – Parâmetro não linear  $k = 1,25$ . Grau de  $\tau$ -hiperbolicidade absoluta semi-local para as regiões  $S_v$  e  $S_a$ . Em cor preta é mostrado o valor assintótico.

A região  $S_v$  tem uma  $\tau$ -hiperbolicidade maior que o valor assintótico para os três quantificadores, começa com um valor grande decaindo rapidamente nos primeiros valores de  $\tau$  até ir convergindo lentamente ao valor assintótico. A região  $S_a$  também inicia com uma  $\tau$ -hiperbolicidade maior que o valor assintótico, porém, menor que o valor inicial que a região  $S_v$  para qualquer quantificador. A  $\tau$ -hiperbolicidade de  $S_a$  converge rapidamente a valores próximos do valor assintótico, sendo mais lenta para o quantificador  $\vartheta_\tau^{(2)}$ .

Para valores de  $\tau$  grande os quantificadores que dependem de  $h_{\tau,x}$ , a  $\tau$ -HA converge ao valor assintótico inferiormente, enquanto converge por acima para o quantificador que depende só do ângulo médio. Para valores pequenos de  $\tau$ , qualquer quantificador  $\tau$ -HA apresenta oscilações em função de  $\tau$ .

Os resultados para a  $\tau$ -HR destas mesmas regiões são exibidos na Fig. 55. Em cores verdes para os valores relacionados à região  $S_v$  e em azul os valores para a região  $S_a$ ; Figs. (a-c) mostram os resultados de  $\varsigma_\tau^{(1)}$ - $\varsigma_\tau^{(3)}$ , respectivamente. Vemos que para o conjunto  $S_v$  converge bem mais rápido para o valor um que a região  $S_a$ . Para valores pequenos de  $\tau$  o valor absoluto nos três quantificadores é maior na região  $S_a$  que na região  $S_v$ . Considerando os quantificadores que dependem de  $h_{\tau,x}$ , o valor da  $\tau$ -hiperbolicidade é positiva para quase todo valor no intervalo, enquanto a  $\tau$ -hiperbolicidade que só depende do ângulo médio a  $\tau$ -hiperbolicidade é menor que um.

Começando a discussão com a  $\tau$ -HA, vemos que os três quantificadores têm o mesmo comportamento, obtendo uma  $\tau$ -HA maior para a região mais próxima do PPH. Além disso, os valores de  $h_{\tau,x}$  e dos ângulos médios, são em média maiores nas regiões mais próximas de PPH que valores da região total.



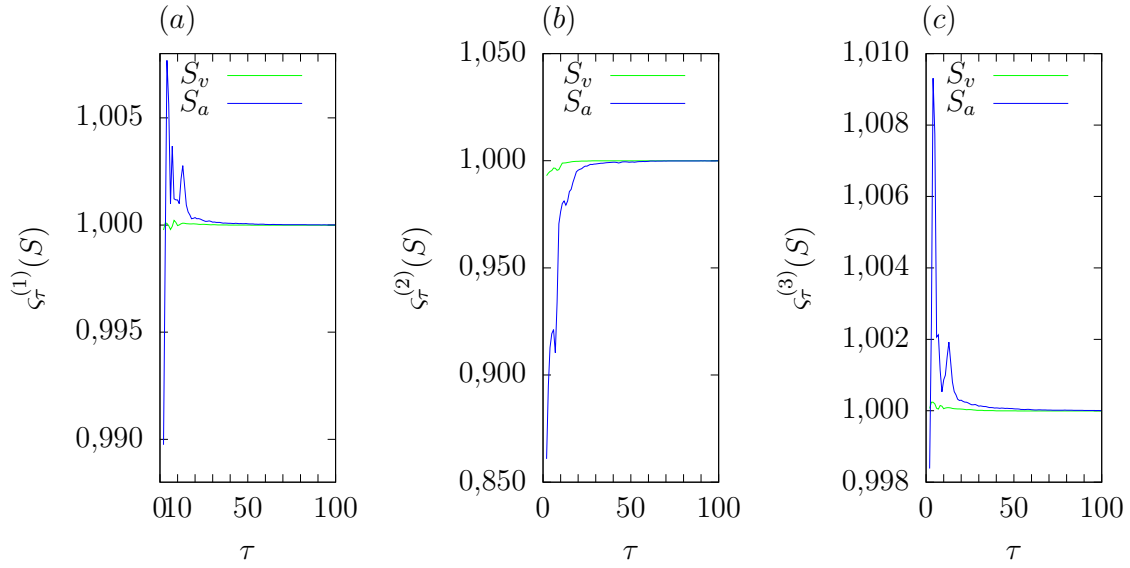


Figura 55 – Parâmetro não linear  $k = 1,25$ . Grau de  $\tau$ -hiperbolicidade relativa semi-local para as regiões  $S_v$  e  $S_a$ . Em cor preta é mostrado o valor assintótico.

A  $\tau$ -HR relaciona a  $\tau$  hiperbolicidade do conjunto  $S_\tau^{(1/2)}$  com o conjunto  $S$ . Se o valor da  $\tau$ -HR é maior que um, nos diz que a média do conjunto  $\tau$ -hiperbólico  $S_\tau^{(1/2)}$  é maior que a média do conjunto  $S$ . Para conjunto próximos de PPH os valores de  $h_{\tau,x}$  no conjunto  $\tau$ -hiperbólico são maiores que no conjunto  $S$ , enquanto os valores da média dos ângulos médios são similares em ambas regiões, isto porque o quantificador  $\varsigma_\tau^{(2)}$  segue o comportamento da relação das áreas. Além disso, a rapidez da convergência depende diretamente da área, pois observando a Fig. 53, vemos que a convergência é mais rápida para a região  $S_v$  que a região  $S_a$ .

### 7.14.2 $\tau$ -Hiperbolicidade em torno de ilhas de regularidade

Na Fig. 56 podemos encontrar os resultados da  $\tau$ -HA da região  $S_r$  (cor rosa) e  $S_c$  (cor ciano), em cor preta os valores assintóticos da  $\tau$ -HA. Na Fig. 56-(a) encontramos os resultados para a medida 1,  $\vartheta_\tau^{(1)}(S)$ , na Fig 56-(b) os resultados da medida  $\vartheta_\tau^{(2)}(S)$  e na Fig. 56-(c) para a medida  $\vartheta_\tau^{(3)}(S)$ . Podemos observar que a  $\tau$ -HA é maior na região  $S_r$  que na região  $S_c$  se considerarmos as medidas 1 e 3, as quais dependem do valor de  $h_{\tau,x}$ . Porém, se considerarmos a medida 2, que só depende dos ângulos médios, a relação da  $\tau$ -HA oscila, ficando similar nas duas regiões para  $\tau$  grandes.

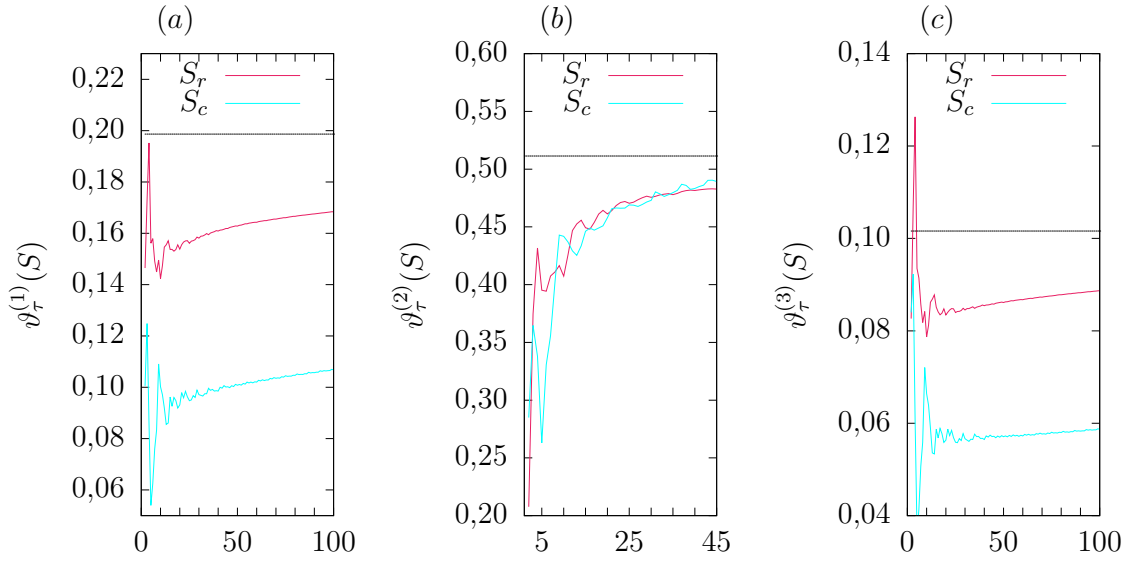


Figura 56 – Parâmetro não linear  $k = 1,25$ . Grau de  $\tau$ -hiperbolicidade absoluta semi-local para as regiões  $S_r$  e  $S_c$ . Em cor preta é mostrado o valor assintótico.

A Fig. 56 mostra que a média dos ângulos dos pontos  $\tau$ -hiperbólicos são similares nestas regiões, porém o valor da diferença dos FTLEs dos pontos  $\tau$ -hiperbólicos na região  $S_c$  são bem menores que na região  $S_r$ , pelo que podemos dizer que a região  $S_c$  tem uma  $\tau$ -HA maior que  $S_r$ . No entanto, o valor da  $\tau$ -HA para as duas regiões é bem menor que o valor assintótico. Para valores pequenos de  $\tau$  as medidas de  $\tau$ -HA apresentam oscilações em função de  $\tau$ .

Os resultados para a  $\tau$ -HR são exibidos na Fig. 56. De cor rosa os valores relacionadas à região  $S_r$  e em ciano os valores para a região  $S_c$ ; Figs. (a-c) mostram os resultados de  $\varsigma_\tau^{(1)}$ - $\varsigma_\tau^{(3)}$ , respectivamente. Vemos que para qualquer medida, o valor da  $\tau$ -HR converge mais rápido ao valor assintótico para a região  $S_r$ , sendo esta região com menor influência das ilhas de regularidade. Similarmente, como nas medidas absolutas, as oscilações podem ser observadas para  $\tau$  pequenos. Para as medidas que dependam da diferença dos FTLEs, as medidas relativas convergem ao valor assintótico por cima, enquanto para a medida 2, que só depende do ângulo médio, a hiperbolicidade relativa converge inferiormente.

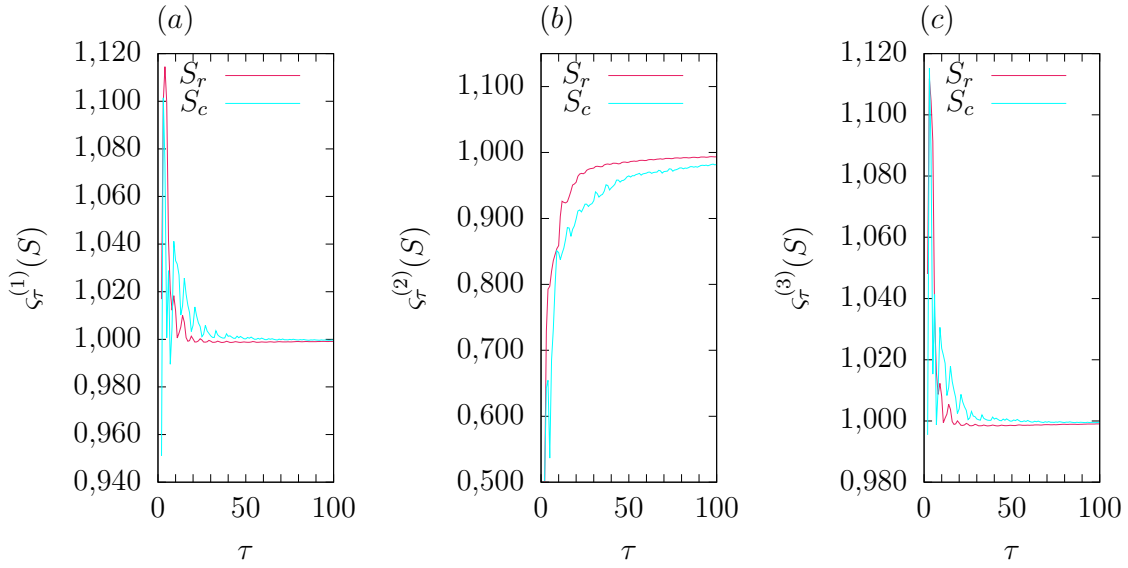


Figura 57 – Parâmetro não linear  $k = 1,25$ . Grau de  $\tau$ -hiperbolicidade relativa semi-local para as regiões  $S_r$  e  $S_c$ . Em cor preta é mostrado o valor assintótico.

## 7.15 Geometria da hiperbolicidade

Para finalizar o nosso estudo numérico da hiperbolicidade no mapa padrão, estudaremos a geometria de  $\varphi_{\tau,x}^{(1)}$ ,  $\varphi_{\tau,x}^{(2)}$  e  $\varphi_{\tau,x}^{(3)}$ , no espaço de fase em cada uma das regiões anteriores, isto é, estudamos as estruturas em  $S$  que geram esses valores em cada região. Para  $\tau = 1, 10, 30$ , as Figs. (58)-(61) mostram a geometria de  $\varphi_{\tau}^{(i=1,2,3)}$  das regiões  $S_v$ ,  $S_a$ ,  $S_r$  e  $S_c$ , respectivamente. Em cor preta estão representados os pontos das regiões  $S$  que não são  $\tau$ -hiperbólicos e em cor branca são as ilhas de regularidade. O intervalo da escala de cores varia para cada um dos quantificadores e do valor dos parâmetros  $\epsilon$  e  $\tau$ , isto para observar com maior detalhe as estruturas em cada caso.

Nas Figs. 58 e 59 são exibidas a geometria da  $\tau$ -hiperbolicidade das regiões  $S_v$  e  $S_a$ . Para cada figura, os painéis (a)-(c) mostram os valores do quantificador um  $\varphi_{\tau=1,10,20}^{(1)}$ . Os painéis (d)-(f) mostram os valores do quantificador  $\varphi_{\tau=1,10,20}^{(2)}$  e nos painéis (g)-(i) são mostrados os valores do quantificador  $\varphi_{\tau=1,10,20}^{(3)}$ . Vemos que os três quantificadores mostram uma estrutura similar. Como podemos ver dos resultados anteriores, pontos não  $\tau$ -hiperbólicos são menores que nas outras regiões, porém na região  $S_a$  os pontos não  $\tau$ -hiperbólicos tem uma área maior. Isto pode ser devido pela sua localização no espaço de fase (ver Fig. 51), isto é, está mais próximo de ilhas de regularidade.

Em essência, a geometria das regiões  $S_v$  e  $S_a$  são similares. Os pontos com menor grau de  $\tau$ -hiperbolicidade estão localizados em torno dos pontos não  $\tau$ -hiperbólicos. Ao aumentar o valor de  $\tau$  estruturas similares a curvas assintóticas aparecem, sendo o quantificador  $\varphi_{\tau}^{(3)}$  que mostra maiores detalhes disto. As curvas na região  $S_a$  tem mais dobras com maior curvatura, que também é associamos a sua localização no espaço de

fase. Nestas regiões de maior hiperbolicidade, ao aumentar  $\tau$  o grau da  $\tau$ -hiperbolicidade dos pontos vai diminuindo.

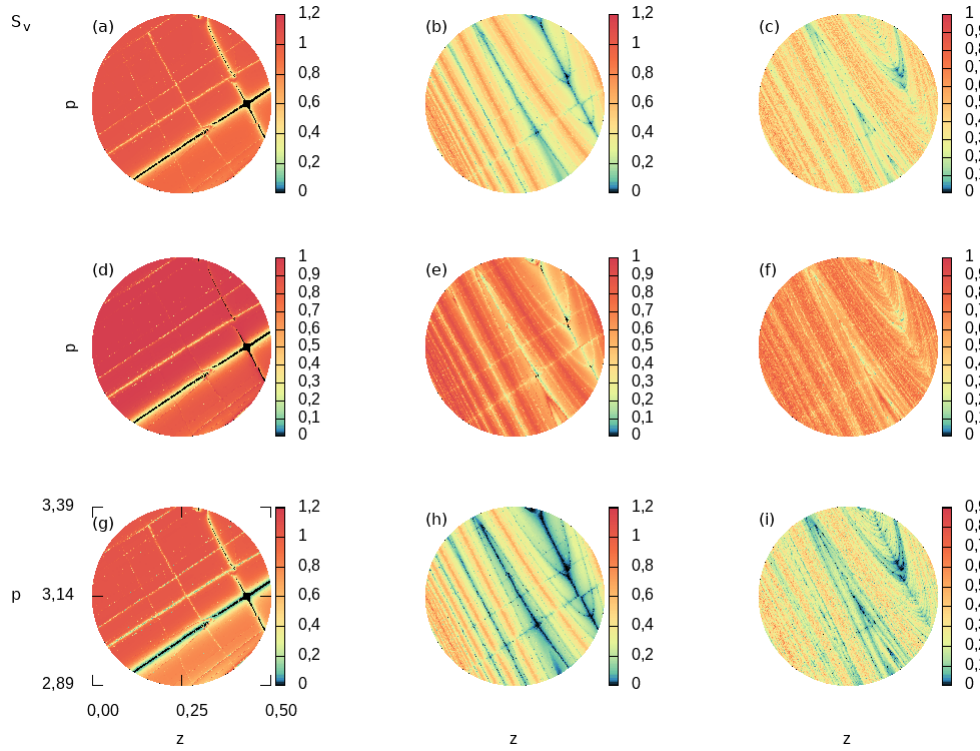


Figura 58 – Geometria da  $\tau$ -hiperbolicidade da região  $S_v$  para três valores do tempo,  $\tau = 1, 10, 20$ . Os painéis (a)-(c) mostram os valores do quantificador  $\varphi_{\tau=1,10,20}^{(1)}$ , os painéis (d)-(f) os valores para  $\varphi_{\tau=1,10,20}^{(2)}$  e nos painéis (g)-(i) para  $\varphi_{\tau=1,10,20}^{(3)}$ .

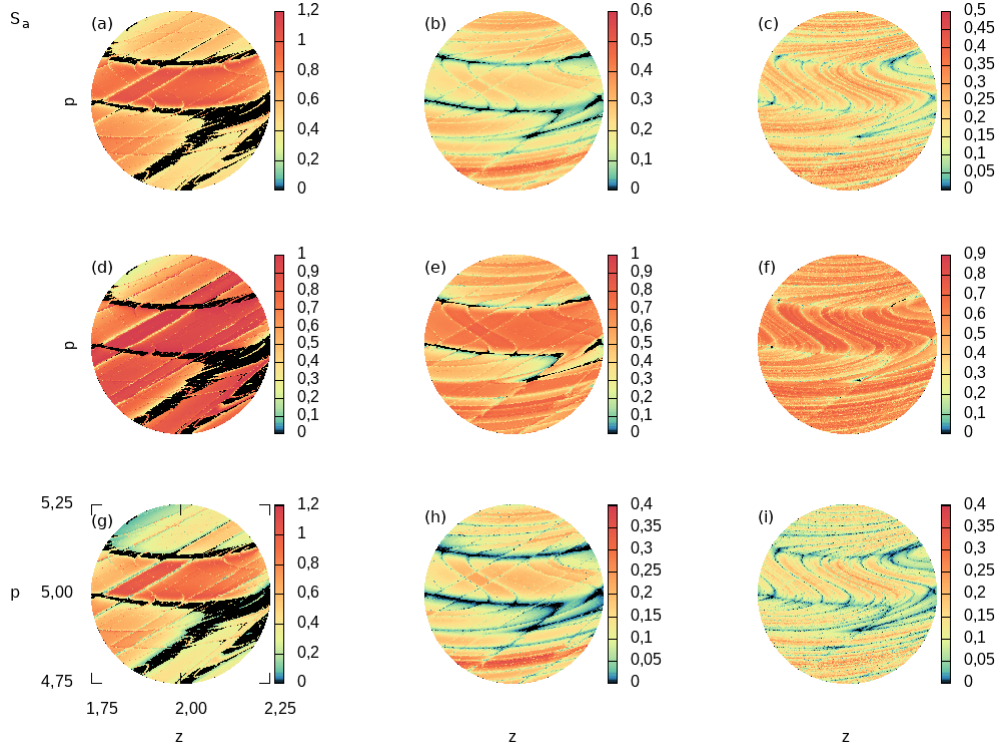


Figura 59 – Geometria da  $\tau$ -hiperbolicidade da região  $S_a$  para três valores do tempo,  $\tau = 1, 10, 20$ . Os painéis (a)-(c) mostram os valores do quantificador  $\varphi_{\tau=1,10,20}^{(1)}$ , os painéis (d)-(f) os valores para  $\varphi_{\tau=1,10,20}^{(2)}$  e nos painéis (g)-(i) para  $\varphi_{\tau=1,10,20}^{(3)}$ .

Como observação geral, vemos que a quantidade de pontos  $\tau$ -hiperbólicos em cada região, reflete os resultados da Fig. 53 onde vemos que para os tempos  $\tau = 1, 10, 20$  a região  $S_v$  contém a maior proporção de área de pontos  $\tau$ -hiperbólicos, enquanto a região  $S_c$  mostra a menor área;  $\mu_{S_v}^\epsilon > \mu_{S_a}^\epsilon > \mu_{S_r}^\epsilon > \mu_{S_c}^\epsilon$ .

Para a geometria das regiões em torno das ilhas,  $S_r$  e  $S_c$ , vemos que as geometrias da  $\tau$ -hiperbolicidade são mais complicadas, ver Figs. 60 e 61. De forma similar, para cada figura os painéis (a)-(c) mostram os valores do quantificador  $\varphi_{\tau=1,10,20}^{(1)}$ . Os painéis (d)-(f) mostram os valores do quantificador  $\varphi_{\tau=1,10,20}^{(2)}$  e nos painéis (g)-(i) são mostrados os valores do quantificador  $\varphi_{\tau=1,10,20}^{(3)}$ .

Vemos que curvas assintóticas vão sendo mais claras para valores maiores de  $\tau$ . Pontos não  $\tau$ -hiperbólicos mais afastados das ilhas, viram em média,  $\tau$ -hiperbólicos mais rápido ao aumentar  $\tau$ , que pontos mais próximos das ilhas. Embora o quantificador  $\varphi_\tau^{(2)}$  (que só depende dos ângulos médios) forneça informação da  $\tau$ -hiperbolicidade, os quantificadores  $\varphi_\tau^{(1)}$  e  $\varphi_\tau^{(3)}$  (que dependem de  $h_{\tau,x}$ ) ajudam a diferenciar o grau de hiperbolicidade entre regiões em torno de ilhas com estruturas diferentes, ver figura 56, além de dar mais detalhes das estruturas dos valores no espaço de fase.

O lado direito da região  $S_c$ , em torno de  $(z,p) \approx (2,25, 5,75)$ , tem uma ilha de regularidade maior, pelo que a sua influência na  $\tau$ -hiperbolicidade é relevante. Vemos

que aumentando o valor de  $\tau$  os pontos não  $\tau$ -hiperbólicos demoram mais para se tornar  $\tau$ -hiperbólicos.

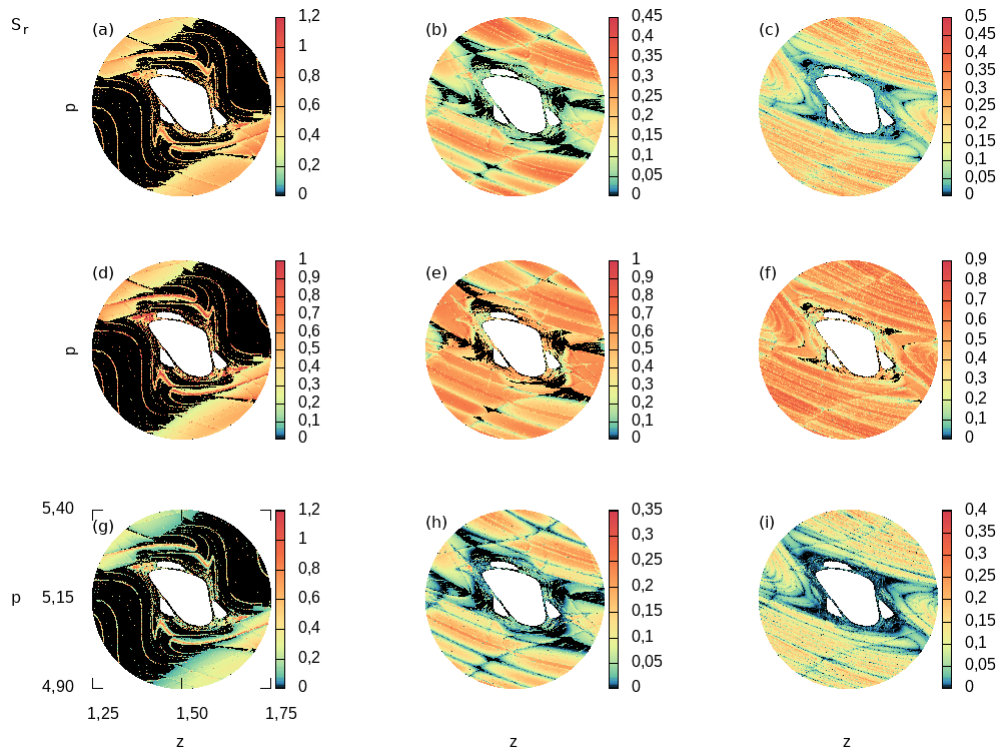


Figura 60 – Geometria da  $\tau$ -hiperbolicidade da região  $S_r$  para três valores do tempo,  $\tau = 1, 10, 20$ . Os painéis (a)-(c) mostram os valores do quantificador  $\varphi_{\tau=1,10,20}^{(1)}$ , os painéis (d)-(f) os valores para  $\varphi_{\tau=1,10,20}^{(2)}$  e nos painéis (g)-(i) para  $\varphi_{\tau=1,10,20}^{(3)}$ .



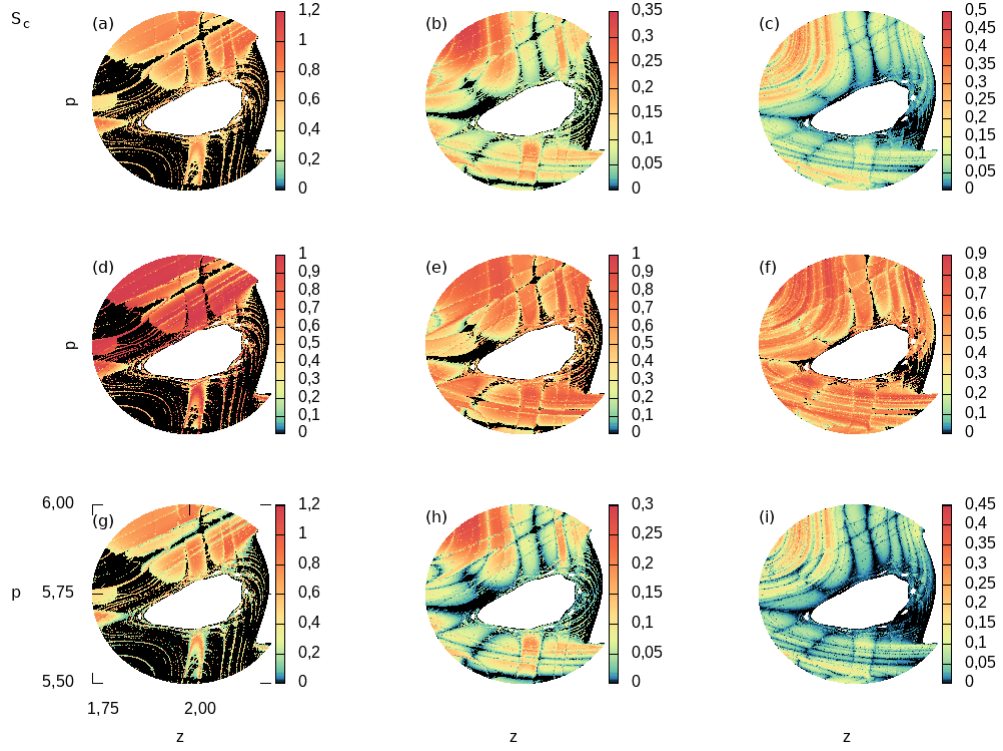


Figura 61 – Geometria da  $\tau$ -hiperbolicidade da região  $S_c$  para três valores do tempo,  $\tau = 1, 10, 20$ . Os painéis (a)-(c) mostram os valores do quantificador  $\varphi_{\tau=1,10,20}^{(1)}$ , os painéis (d)-(f) os valores para  $\varphi_{\tau=1,10,20}^{(2)}$  e nos painéis (g)-(i) para  $\varphi_{\tau=1,10,20}^{(3)}$ .

## 7.16 Refinamento e quantificadores da não hiperbolicidade

Os quantificadores podem ser definidos de tal forma que possa-se lidar com qualquer medida invariante  $\mu$ , sem a necessidade de assumir ergodicidade. Isto é possível considerando o segundo refinamento do teorema de Oseledec: a afirmação do teorema deve ser modificada para o efeito de que, para quase todo ponto  $x \in \Lambda$  os *expoentes de Lyapunov*  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  devem ser substituídos por funções mensuráveis  $\lambda^{(1)}(x), \dots, \lambda^{(k)}(x)$ , dependendo apenas de  $\mu$ . Isto significa que o valor assintótico  $\tau \rightarrow \infty$  vai depender da condição inicial.

Por outro lado, até aqui, focamos em quantificar o grau de hiperbolicidade parcial (ou hiperbolicidade). Isto é, para que as funções  $\varphi_{\tau,x}^{(1,2,3)}$  sejam consideradas como um quantificador do grau da hiperbolicidade parcial local do ponto  $x$ , deve ser um ponto parcialmente hiperbólico. Porém, podemos estar interessados no grau da não hiperbolicidade parcial, onde o critério da decomposição de Oseledec  $(\tau, \epsilon)$ -dominada não é satisfeita. Quantificadores baseados na teoria aqui apresentada podem ser usados para este propósito, fazendo pequenas modificações nas funções  $\varphi_{\tau,x}^{(1,2,3)}$ . No entanto, deixamos o estudo destes quantificadores para outro trabalho.

Da mesma forma, fazendo pequenas modificações nas funções  $\varphi_{\tau,x}^{(1,2,3)}$ , podemos

construir quantificadores da violação da hiperbolicidade e da (violação da) decomposição de Oseledec dominada.



---

## 8. Considerações finais

---

O tema principal deste tese foi o estudo numérico de regiões caóticas de sistemas Hamiltonianos de baixa dimensão, em particular, o efeito de aprisionamento dinâmico e o grau de hiperbolicidade. Sabemos que em sistemas Hamiltonianos de dimensão superior estes fenômenos são mais complexos, isto porque que eles têm um espaço de fase misto com componentes regulares e caóticos que não são separados pelos toros invariantes e não estão mais isolados. A trajetória caótica visita regiões do espaço de fase onde pode sofrer um confinamento dinâmico próximo aos toros  $N$ -dimensionais, gerando o efeito de aprisionamento dinâmico e mudanças no grau de hiperbolicidade. Em particular, isto é de interesse nos fenômenos de transporte, que tem grande interesse em várias áreas da ciência. O conceito de hiperbolicidade esta estreitamente relacionado com a estabilidade de conjuntos e trajetórias de sistemas dinâmicos, assim como fornece informações sobre a geometria do espaço de fase e do espaço tangente. O efeito de aprisionamento dinâmico, hiperbolicidade e a sua relação em sistemas de dimensão superior ainda esta sob investigação. Para contribuir nesta linha de pesquisa, estudamos estes fenômeno focando nas propriedades da decomposição de Oseledec de trajetórias em regiões caóticas, tais como, os FTLEs, a dimensão dos subespaços de Oseledec, e os ângulos médios entre estes subespaços. Grande parte do nosso trabalho é numérico, porém, quantificadores do grau da hiperbolicidade parcial foram propostos teoricamente. Como partida, nossas descrições foram aplicadas em dois sistemas Hamiltonianos de baixa dimensão. O mapa padrão sendo um sistema discreto bidimensional e o sistema de Hénon-Heiles como sistema contínuo quadrimensional no espaço de fase.

O trabalho foi dividido em quatro partes: (1) a estatística dos FTLEs e os ângulos locais, (2) caracterizar a hierarquia de aprisionamento dinâmico através das distribuições dos ângulos médios e a relação de volumes, (3) a variação da hiperbolicidade parcial entre regimes de movimentos ao longo de trajetórias caóticas e (4) proposta e análise de quantificadores explícitos do grau da hiperbolicidade parcial aplicáveis a regiões específicas do espaço de fase. A eficácia das simulações nos permitiu obter os seguintes resultados com uma boa estatística.

(1) Para o sistema discreto bidimensional (mapa padrão) as distribuições dos FTLEs vão tornando-se antissimétricas ao aumentar o parâmetro não linear. Lembramos que o subespaço instável (estável) expande (contrai) uniformemente para tempos suficientemente grandes. Para tempos pequenos as direções instáveis e estáveis não irão necessariamente expandir ou contrair, respectivamente. A direção instável pode contrair localmente e a

direção estável pode expandir localmente, além disso, a taxa de expansão (contração) depende da posição  $x$  no espaço de fase e do tempo de iteração  $\tau$ . Isto ajuda a entender de forma quantitativa os diferentes comportamentos em sistemas com espaço de fase mista.

Por tanto, encontramos que para valores próximo de zero do parâmetro de não linearidade, não existe uma direção preferencial dos subespaços de Oseledec para expandir ou contrair localmente. A probabilidade que a direção instável (estável) expanda (contraia) localmente, aumenta quando o parâmetro de não linearidade é maior. Se o ângulo local é próximo de zero, então existe uma grande probabilidade de que os FTLEs locais ou a diferença dos FTLE sejam próximo de zero, porém, para valores pequenos do parâmetro de não linearidade, temos uma probabilidade considerável de encontrar ângulos pequenos para qualquer valor dos FTLEs.

Para o sistema contínuo (Hénon-Heiles), vemos que as distribuições dos FTLEs locais são antissimétricas. Neste caso, existem três subespaços de Oseledec: instável, central e estável. As simulações mostram que o ângulo entre os subespaços instável-central e central-estável são iguais, além disso, para todo valor do parâmetro de não linearidade (a energia) a probabilidade deste ângulo ser próximo de zero é relevante, sendo prevalente quando o parâmetro aumenta. Para o ângulo entre os subespaços instável-estável, a probabilidade de encontrar ângulos próximos de zero é bem maior para valores pequenos do parâmetro não linear, diminuindo até quase zerar para os valores maiores do parâmetro.

(2) No estudo numérico de aprisionamento dinâmico, os resultados são similares tanto para o mapa padrão como para o sistema de Hénon-Heiles. As distribuições das relações de volumes e dos ângulos médios, assim como os FTLEs, podem ser usados para caracterizar o aprisionamento dinâmico. As distribuições são multimodais, o número de modas depende do parâmetro de não linearidade e da janela temporal. A análise da geometria destas quantidades no espaço de fase e na seção de Poincaré, nos permite associar as modas nas distribuições às regiões no espaço de fase.

Os nossos resultados mostram que a hierarquia das camadas caóticas estão associadas as diferentes modas nas distribuições, onde uma moda poder ser associada a mais de uma camada caótica. Camadas mais próximas das ilhas de regularidade os valores da diferença dos FTLEs e os ângulos médios são menores. Além disso, curvas assintóticas instáveis influenciam também nestas modas. Ainda mais, dentro de uma mesma camada caótica, curvas assintóticas instáveis próximas a pontos periódicos hiperbólicos em média tem valores da diferença dos FTLEs e ângulos médios maiores que curvas assintóticas instáveis mais próximas de ilhas de regularidade. O que podemos concluir que variações do grau de hiperbolicidade entre as camadas caóticas e regiões em torno das curvas assintóticas instáveis.

Encontramos também que, no cenário de caos local e com um mesmo valor do parâmetro de não linearidade, as distribuições em cada uma das regiões também são multimodais,

cujo comportamento destas modas em função da janela temporal são influenciadas pelas camadas caóticas e as curvas assintóticas instáveis. Porém, o intervalo das modas em cada região esta relacionada com a área total das regiões. O intervalo das distribuições numa região será menor que o intervalo de uma região com área total maior. Portanto, podemos conjecturar que num espaço de fase com regiões caóticas desconectadas, regiões com maior área total são mais hiperbólicas que regiões com menor área total. Estudos futuros serão feitos para relacionar quantitativamente a  $(\tau, \epsilon)$ -hiperbolicidade das camadas caóticas e das curvas assintóticas instáveis com as modas encontradas nas distribuições de probabilidade.

(3) Regimes de movimento ordenado, semi-ordenado e caótico definidos ao longo de trajetórias caóticas foram usados recentemente para aumentar substancialmente a caracterização de aprisionamento dinâmico usando gráficos de recorrência e para descrever sincronização de aprisionamento dinâmico intermitente. Seguindo a linha de caracterizar a estrutura dinâmica dentro destes regimes de movimento, estudamos os ângulos entre os CLVs para caracterizar o desvio da hiperbolicidade entre os diferentes regimes. Neste caso, usamos dois sistemas Hamiltonianos fracamente caóticos, o mapa composto por  $N = 2$  mapas padrão acoplados e o sistema Hénon-Heiles, representando problemas discretos e contínuos, respectivamente.

No caso dos mapa acoplados, o sistemas tem dois subespaços instáveis e dois subespaços estáveis, o estudo foi realizado para os seguintes três ângulos:  $\theta_{\tau,x}^{(1,2)}$  sendo o ângulo entre os dois subespaços de Oseledec instáveis,  $\theta_{\tau,x}^{(2,3)}$  sendo o ângulo entre os subespaços de Oseledec menos instável-menos estável e  $\theta_{\tau,x}^{(1,4)}$  sendo o ângulo entre os subespaços de Oseledec mais instável-mas estável;  $\tau = 1,100$ . Enquanto no caso contínuo, as informações relevante podem ser fornecidas pelos ângulos locais  $\theta_{0.01,x}^{(1,2)}$ ,  $\theta_{0.01,x}^{(1,4)}$  e  $\theta_{0.01,x}^{(3,4)}$ ; o seus respectivos valores médios  $\theta_{250,x}^{(1,2)}$ ,  $\theta_{250,x}^{(1,4)}$  e  $\theta_{250,x}^{(3,4)}$  também foram estudados. Resumimos nossos resultados apresentando as principais propriedades encontrados em cada regime de movimento.

*Regime caótico:* começamos a discutir o caso dos mapas acoplados discretos. Todos os ângulos locais entre  $\theta_{1,x}^{(1,2)}$  e  $\theta_{1,x}^{(2,3)}$  tendem à ortogonalidade hiperbólica. Os valores dos ângulos médios correspondentes têm distribuições que não são nítidas em  $\pi/2$ . Perto de tangências entre variedades ocorrem apenas para  $\theta_{1,x}^{(1,2)}$ , o ângulo local entre as duas variedades instáveis. Os dois ângulos mais prováveis de  $\theta_{1,x}^{(1,4)}$  e  $\theta_{\tau,x}^{(1,4)}$  estão relacionados à hiperbolicidade não ortogonal. Para o caso de Hénon-Heiles, todos os ângulos médios  $\theta_{\tau,x}^{(i,j)}$  tem maior probabilidade  $P(\theta_{\tau,x}^{ij})$  perto de  $\theta_{ij}^{(\omega)} \sim \pi/2$ . Os ângulos locais são distribuídos em todo o intervalo  $(0, \pi)$ , mas perto de tangências entre variedades não são observadas. Portanto, o movimento é hiperbólico.

*Regime Semi ordenado:* apenas o caso de mapas discretos tem tal regime, neste caso é  $S_1$ . A ortogonalidade hiperbólica ocorre apenas entre as duas variedades instáveis e com uma grande probabilidade  $P(\theta_{\tau,x}^{(1,2)} = \pi/2)$  de ocorrer. Os dois ângulos médios mais prováveis  $\theta_{\tau,x}^{14}$  e os ângulos locais  $\theta_{1,x}^{(2,3)}$  estão relacionados à não ortogonalidade hiperbólica. No

entanto, ângulos locais  $\theta_{1,x}^{(2,3)}$  perto de 0 e  $\pi$  são observados.

*Regime ordenado:* Para os mapas discretos nos regimes ordenados  $S_0$ , a não hiperbolicidade é observada apenas entre as duas variedades instáveis. Todos os outros ângulos são essencialmente distribuídos dentro do intervalo  $(0, \pi)$ .

(4) Propomos novos quantificadores do grau de hiperbolicidade parcial aplicável a pontos e regiões específicas no espaço de fase, o ponto e as regiões devem permitir uma decomposição de Oseledec não trivial do seu espaço tangente. Além da proposta teórica, um estudo numérico destes foi realizado.

Seguindo a ideia da  $\tau$ -decomposição de Oseledec, definimos um critério similar que nos ajuda a considerar se um ponto  $x \in M$  é  $(\tau, \epsilon)$ -hiperbolicidade parcial restrita na trajetória  $\{f^\tau(x)\}$ . Esse critério, além de considerar a relação a tempo finito da expansão (contração) de vetores unitários nos diferentes subespaços de Oseledec, considera também a dimensão dos subespaços de Oseledec. A relação de volumes entre pares de subespaços de Oseledec,  $h_{\tau,x}^{(i,j)}$ , quantifica este critério. O valor de  $\tau$  é a janela temporal e o parâmetro  $\epsilon$  pode ser interpretado como um grau de  $\tau$ -dominação, nos consideramos que  $\epsilon \geq 1/2$ . Assim, para cada valor de  $\tau$  e  $\epsilon$  é definido uma  $(\tau, \epsilon)$ -hiperbolicidade parcial restrita a trajetórias de longitude  $\tau$ . A relação de volumes entre dois subespaços de Oseledec é definido como segue (em termos dos FTLEs e a dimensão dos subespaços):  $h_{\tau,x}^{(i,j)} = d_i \lambda_{\tau,x}^{(i)} - d_j \lambda_{\tau,x}^{(j)}$ .

*Hiperbolicidade sobre um ponto  $x$ :* Consideramos o grau de  $(\tau, \epsilon)$ -hiperbolicidade parcial de um ponto  $(\tau, \epsilon)$ -parcialmente hiperbólico através de uma função  $\varphi_{\tau,x}$ . A função depende das propriedades da decomposição de Oseledec em  $T_x M$  e da evolução  $D_x f^\tau$ , isto é, dos FTLEs, dos ângulos médios e da dimensão dos subespaços. Em particular, definimos três funções  $\varphi_{\tau,x}^{(1,2,3)}$  como candidatas para quantificar o grau de  $(\tau, \epsilon)$ -hiperbolicidade. a primeira delas depende da relação de volumes e da dimensão de volumes, a segunda função depende unicamente dos ângulos médios e a terceira função considera as três observáveis.

Através da geometria de  $\varphi_{\tau,x}^{(1,2,3)}$  no espaço de fase. Observamos que as três funções são bons candidatos do grau da hiperbolicidade parcial, porem a função três  $\varphi_{\tau,x}^{(3)}$  dá mais informação. Em particular, os valores das funções  $\varphi_{\tau,x}^{(1)}$  e  $\varphi_{\tau,x}^{(3)}$  de pontos em torno de ilhas de regularidade, são sensíveis as estruturas das ilhas.

*Hiperbolicidade sobre conjuntos:* Para a quantificação do grau da  $(\tau, \epsilon)$ -hiperbolicidade parcial de regiões específicas,  $S$ , temos as seguintes considerações.  $S$  deve ser um subconjunto de uma região  $\Lambda \subseteq M$ , tal que  $\Lambda$  tem medida de probabilidade total,  $mu(\Lambda) = 1$ , consideramos unicamente a medida de Lebesgue.  $S$  deve ter medida positiva  $\mu(S) > 0$ . Os quantificadores foram definidos através de médias de espaço da função  $\varphi_\tau$  sobre o conjunto  $S$  e o subconjunto  $S_\tau^{(\epsilon)} \subseteq S$  composto dos pontos em  $x \in S$  que são  $(\tau, \epsilon)$ -parcialmente hiperbólicos. E como ultima consideração, as medidas levam em conta a relação das medidas do conjunto  $(\tau, \epsilon)$ -parcialmente hiperbólico de  $S$  e a medida do conjunto total  $S$ .

Dos tipos da  $(\tau, \epsilon)$ -hiperbolicidade parcial foram definidos, a  $(\tau, \epsilon)$ -hiperbolicidade parcial absoluta e a  $(\tau, \epsilon)$ -hiperbolicidade parcial relativa.

Os dois tipos de quantificadores dependem da relação entre a área do subconjunto  $(\tau, \epsilon)$  parcialmente hiperbólico de  $S$  e a área do conjunto  $S$ ,  $0 < \mu_S^{(\tau, \epsilon)} \leq 1$ . A  $(\tau, \epsilon)$ -hiperbolicidade parcial absoluta é proporcional à média da função  $\varphi_{\tau, x}$  do conjunto  $(\tau, \epsilon)$ -parcialmente hiperbólico de  $S$ , enquanto que a  $(\tau, \epsilon)$ -hiperbolicidade parcial relativa é proporcional a relação entre a média da função  $\varphi_{\tau, x}$  do conjunto  $(\tau, \epsilon)$ -parcialmente hiperbólico de  $S$  e a média da função  $\varphi_{\tau, x}$  do conjunto de  $S$ . Para o sistema de Hénon-Heiles e o mapa padrão essas medidas da  $(\tau, \epsilon)$ -hiperbolicidade parcial se tornam medidas da  $(\tau, \epsilon)$ -hiperbolicidade.

Como exemplo teórico calculamos os quantificadores da hiperbolicidade para o sistema de Hénon-Heiles, mostrando que não dependem explicitamente do subespaço central. Conjecturamos que uma explicação disto é devido a simetria tanto nas dimensões dos subespaços de Oseledec como no espectro de Lyapunov. O estudo numérico do sistema de Hénon-Heiles será deixado para um trabalho posterior, porém a geometria na seção de Poincaré indica que resultados similares sobre o mapa padrão poderiam ser encontrados neste sistema contínuo.

Os resultados numéricos mostram que as três medidas da  $(\tau, 1/2)$ -hiperbolicidade absoluta e relativa para regiões específicas do espaço de fase refletem propriedades esperadas sobre a hiperbolicidade. Para regiões em torno de pontos periódicos hiperbólicos são mais hiperbólicas que as regiões mais afastadas destes, podendo diferenciar o grau da hiperbolicidade entre pontos periódicos hiperbólicos. Regiões em torno de ilhas de regularidade são menos hiperbólicas que regiões mais afastadas destas, além disso, os quantificadores são sensíveis à quantidade de ilhas e ao tamanho destas. A geometria no espaço de fase ajuda a fazer uma análise mais detalhada de quais ilhas ou pontos periódicos hiperbólicos tem mais influência na hiperbolicidade dentro de uma região específica.

As medidas que dependem da relação de volumes reflete com mais detalhe as propriedades da hiperbolicidade que a medida que só depende dos ângulos entre os subespaços, portanto, podemos concluir que quantificadores da hiperbolicidade parcial devem considerar tanto os ângulos entre os subespaços como as relações de volumes entre os diferentes subespaços de Oseledec.

As descrições do efeito de aprisionamento dinâmico e da hiperbolicidade parcial para tempo finito aqui propostas, ajudam a entender melhor as características importantes da geometria e dinâmica de regiões caóticas, fornecendo dessa forma, uma espécie de ferramenta de visualização para perceber o que acontece no espaço de fase e o fibrado tangente de sistemas Hamiltonianos de maior dimensão. Sendo assim, uma maneira promissora de combinar simulações numéricas e propriedades matemáticas para entender mais as propriedades complexas encontradas na dinâmica de sistemas Hamiltonianos de

dimensões superiores. Em particular, isto é crucial para discutir fenômenos de transporte. Finalmente, as descrições da hiperbolicidade parcial podem ser ampliadas para outros sistemas dinâmicos tanto para sistemas conservativos como para sistemas dissipativos e para sistemas de maior dimensão finita, por exemplo, para atratores caóticos. Além disso, fazendo pequenas modificações, podemos construir quantificadores da violação da hiperbolicidade e da (violação da) dominação da decomposição de Oseledec.

---

## Referências

---

- 1 MORBIDELLI, A. *Modern Celestial Mechanics: Aspects of Solar System Dynamics*. Taylor & Francis, 2002. (Advances in astronomy and astrophysics). Disponível em: [https://books.google.com.br/books?id=H\\\_\\_oczQEACAAJ](https://books.google.com.br/books?id=H\__oczQEACAAJ).
- 2 SALMON, R. Hamiltonian fluid mechanics. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 20, n. 1, p. 225–256, 1988. Disponível em: <https://doi.org/10.1146/annurev.fl.20.010188.001301>.
- 3 MORRISON, P. J. Hamiltonian description of the ideal fluid. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 70, p. 467–521, Apr 1998. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.70.467>.
- 4 DELL'ANTONIO, G. F.; FIGARI, R.; TETA, A. Hamiltonians for systems of  $n$  particles interacting through point interactions. *Annales de l'I.H.P. Physique théorique*, Gauthier-Villars, v. 60, n. 3, p. 253–290, 1994. Disponível em: [http://www.numdam.org/item/AIHPA\\_1994\\_\\_60\\_3\\_253\\_0](http://www.numdam.org/item/AIHPA_1994__60_3_253_0).
- 5 CURRIE, D. G.; JORDAN, T. F.; SUDARSHAN, E. C. G. Relativistic invariance and hamiltonian theories of interacting particles. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 35, p. 350–375, Apr 1963. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.35.350>.
- 6 ZAKHAROV, V.; MUSER, S.; RUBENCHIK, A. Hamiltonian approach to the description of non-linear plasma phenomena. *Physics Reports*, v. 129, n. 5, p. 285 – 366, 1985. ISSN 0370-1573. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157385900407>.
- 7 OTT, E. *Chaos in dynamical systems*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1993.
- 8 ROBINSON, R. C. Generic properties of conservative systems. *American Journal of Mathematics*, Johns Hopkins University Press, v. 92, n. 3, p. 562–603, 1970. ISSN 00029327, 10806377. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2373361>.
- 9 ROBISON, C. *Dynamical systems; stability, symbolic dynamics and chaos*. [S.l.]: CRC Press, 1999. ISBN 0-8493-8495-8.
- 10 NEWHOUSE, S. E. *Lectures on dynamical systems*. [S.l.]: Birkhäuser, Boston, MA, 1980. ISBN 978-1-4899-3743-8.
- 11 BOCHI, J.; VIANA, M. The lyapunov exponents of generic volume-preserving and symplectic maps. *Annals of mathematics*, v. 161, n. 3, p. 1423–1485, 2005.
- 12 MEISS, J. D. Symplectic maps, variational principles, and transport. *Rev. Mod. Phys.*, v. 64, p. 795–848, 1992.
- 13 MACKAY, R.; MEISS, J.; PERCIVAL, I. Transport in hamiltonian systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 13, n. 1, p. 55 – 81, 1984. ISSN 0167-2789. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167278984902707>.

- 14 LOZEJ, i. c. v. Stickiness in generic low-dimensional hamiltonian systems: A recurrence-time statistics approach. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 101, p. 052204, May 2020. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.101.052204>>.
- 15 CONTOPOULOS, G.; HARSOULA, M. stickiness effects in conservative systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v. 20, n. 07, p. 2005–2043, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S0218127410026915>>.
- 16 ALTMANN, E. G.; PORTELA, J. S. E.; TÉL, T. Leaking chaotic systems. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 85, p. 869–918, May 2013. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.85.869>>.
- 17 BUNIMOVICH, L. A. et al. Few islands approximation of hamiltonian system with divided phase space. *Experimental Mathematics*, Taylor Francis, v. 0, n. 0, p. 1–10, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/10586458.2018.1559777>>.
- 18 LIVORATI, A. L. P. et al. Stickiness in a bouncer model: A slowing mechanism for fermi acceleration. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 86, p. 036203, Sep 2012. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.86.036203>>.
- 19 SZEZECH, J. D. et al. Transport properties in nontwist area-preserving maps. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, v. 19, n. 4, p. 043108, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.3247349>>.
- 20 VALLEJO, J. C.; VIANA, R. L.; SANJUÁN, M. A. F. Local predictability and nonhyperbolicity through finite lyapunov exponent distributions in two-degrees-of-freedom hamiltonian systems. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 78, p. 066204, Dec 2008. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.78.066204>>.
- 21 OLIVEIRA, H. A.; MANCHEIN, C.; BEIMS, M. W. Soft wall effects on interacting particles in billiards. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 78, p. 046208, Oct 2008. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.78.046208>>.
- 22 SILVA, R. M. da; MANCHEIN, C.; BEIMS, M. W. Intermittent stickiness synchronization. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 99, p. 052208, May 2019. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.99.052208>>.
- 23 MANCHEIN, C.; BEIMS, M. W.; ROST, J. M. Characterizing weak chaos in nonintegrable Hamiltonian systems: The fundamental role of stickiness and initial conditions. *Physica A*, v. 400, p. 186–193, 2014.
- 24 ZASLAVSKY, G. M.; STEVENS, D.; WEITZNER, H. Self-similar transport in incomplete chaos. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 48, p. 1683–1694, Sep 1993. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.48.1683>>.
- 25 SZEZECH, J.; LOPES, S.; VIANA, R. Finite-time lyapunov spectrum for chaotic orbits of non-integrable hamiltonian systems. *Physics Letters A*, v. 335, n. 5, p. 394 – 401, 2005. ISSN 0375-9601. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960104017876>>.
- 26 HARLE, M.; FEUDEL, U. Hierarchy of islands in conservative systems yields multimodal distributions of ftles. *Chaos, Solitons & Fractals*, v. 31, n. 1, p. 130 – 137, 2007. ISSN 0960-0779. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077905008908>>.



- 27 BUNIMOVICH, L. A.; VELA-AREVALO, L. V. Many faces of stickiness in hamiltonian systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, v. 22, n. 2, p. 026103, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.3692974>>.
- 28 LOPES, S. R. et al. Anomalous transport induced by nonhyperbolicity. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 86, p. 016216, Jul 2012. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.86.016216>>.
- 29 KRÜGER, T. S. et al. Mechanism for stickiness suppression during extreme events in hamiltonian systems. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 91, p. 062903, Jun 2015. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.91.062903>>.
- 30 ZOU, Y. et al. Characterization of stickiness by means of recurrence. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, v. 17, n. 4, p. 043101, 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.2785159>>.
- 31 ALTMANN, E. G.; SILVA, E. C. da; CALDAS, I. L. Recurrence time statistics for finite size intervals. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, v. 14, n. 4, p. 975–981, 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.1795491>>.
- 32 ALTMANN, E. G.; MOTTER, A. E.; KANTZ, H. Stickiness in hamiltonian systems: From sharply divided to hierarchical phase space. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 73, p. 026207, Feb 2006. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.73.026207>>.
- 33 ABUD, C. V.; CARVALHO, R. E. de. Multifractality, stickiness, and recurrence-time statistics. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 88, p. 042922, Oct 2013. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.88.042922>>.
- 34 SANTOS, M. S. et al. Using rotation number to detect sticky orbits in hamiltonian systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, v. 29, n. 4, p. 043125, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.5078533>>.
- 35 LOZEJ, i. c. v.; ROBNIK, M. Structure, size, and statistical properties of chaotic components in a mixed-type hamiltonian system. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 98, p. 022220, Aug 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.98.022220>>.
- 36 Contopoulos, G. Orbits in Highly Perturbed Dynamical Systems. 111. Nonperiodic Orbits. *Astron. J.*, v. 76, p. 147, mar. 1971.
- 37 SHIRTS, R. B.; REINHARDT, W. P. Approximate constants of motion for classically chaotic vibrational dynamics: Vague tori, semiclassical quantization, and classical intramolecular energy flow. *The Journal of Chemical Physics*, v. 77, n. 10, p. 5204–5217, 1982. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.443697>>.
- 38 KARNEY, C. F. F.; RECHESTER, A. B.; WHITE, R. B. Effect of noise on the standard mapping. *Physica D*, v. 4, n. 3, p. 425 – 438, 1982.
- 39 KARNEY, C. F. F. Long-time correlations in the stochastic regime. *Physica D*, v. 8, n. 1, p. 360 – 380, 1983.

- 40 MEISS, J. D.; OTT, E. Markov-tree model of intrinsic transport in hamiltonian systems. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 55, p. 2741–2744, Dec 1985. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.55.2741>>.
- 41 MACKAY, R. S.; MEISS, J. D.; PERCIVAL, I. C. Stochasticity and transport in hamiltonian systems. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 52, p. 697–700, Feb 1984. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.52.697>>.
- 42 CRISTADORO, G.; KETZMERICK, R. Universality of algebraic decays in hamiltonian systems. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 100, p. 184101, May 2008. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.100.184101>>.
- 43 CHIRIKOV, B. V. Chaotic dynamics in hamiltonian systems with divided phase space. In: GARRIDO, L. (Ed.). *Dynamical System and Chaos*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1983. p. 29–46. ISBN 978-3-540-39594-2.
- 44 CHIRIKOV, B.; SHEPELYANSKY, D. Correlation properties of dynamical chaos in Hamiltonian systems. *Physica D*, v. 13, p. 395 – 400, 1984.
- 45 ALTMANN, E. G. *Intermittent Chaos in Hamiltonian Dynamical Systems*. Tese (Doutorado) — Max Planck Institut für Physik Komplexer Systeme, 2007.
- 46 ZASLAVSKY, G. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport. *Physics Reports*, v. 371, n. 6, p. 461 – 580, 2002. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157302003319>>.
- 47 CHIRIKOV, B. V.; SHEPELYANSKY, D. L. Asymptotic statistics of poincaré recurrences in hamiltonian systems with divided phase space. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 82, p. 528–531, Jan 1999. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.82.528>>.
- 48 ROBNIK, M. et al. New universal aspects of diffusion in strongly chaotic systems. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 30, n. 23, p. L803–L813, dec 1997. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F0305-4470%2F30%2F23%2F003>>.
- 49 MANCHEIN, C.; BEIMS, M. W.; ROST, J. M. Characterizing the dynamics of higher dimensional nonintegrable conservative systems. *Chaos*, v. 22, p. 033137, 2012.
- 50 LANGE, S.; BÄCKER, A.; KETZMERICK, R. What is the mechanism of power-law distributed Poincaré recurrences in higher-dimensional systems? *Europhys. Lett.*, v. 116, p. 30002, 2016.
- 51 BENETTIN, G. et al. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them. part 1: Theory. *Meccanica*, v. 15, n. 1, p. 9–20, 1980. ISSN 1572-9648. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF02128236>>.
- 52 BENETTIN, G. et al. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them. part 2: numerical application. *Mecanica*, v. 15, p. 21–30, 1980.
- 53 OSELEDETS, V. I. A multiplicative ergodic theorem. characteristic llyapunov, exponents of dynamical systems. *Trans. Moscow Math. Soc.*, v. 19, p. 197–231, 1968.

- 54 MAÑÉ, R. *Ergodic theory and differentiable dynamics*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1987.
- 55 BONATTI, L. J. D. C.; VIANA, M. *Dynamics beyond uniform hyperbolicity*. [S.l.]: Springer, 2004.
- 56 RUELLE, D. Ergodic theory of differentiable dynamical systems. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, v. 50, p. 27–58, 1979.
- 57 BARREIRA, L.; PESIN, Y. B. *Lyapunov exponents and smooth ergodic theory*. [S.l.]: American mathematical society, 2000.
- 58 ARAÚJO, V.; VIANA, M. Hyperbolic dynamical systems. In: \_\_\_\_\_. *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*. New York, NY: Springer New York, 2009. p. 4723–4737. ISBN 978-0-387-30440-3. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/978-0-387-30440-3\\_279](https://doi.org/10.1007/978-0-387-30440-3_279)>.
- 59 ARAÚJO, V.; BUFETOV, A. I.; FILIP, S. On Hölder-continuity of Oseledets subspaces. *Journal of the London Mathematical Society*, v. 93, n. 1, p. 194–218, 12 2015. ISSN 0024-6107. Disponível em: <<https://doi.org/10.1112/jlms/jdv057>>.
- 60 BARREIRA, L.; PESIN, Y. *Nonuniform Hyperbolicity: Dynamics of Systems with Nonzero Lyapunov Exponents*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications).
- 61 BESSA, M.; ROCHA, J.; TORRES, M. J. Hyperbolicity and stability for hamiltonian flows. *Journal of Differential Equations*, v. 254, n. 1, p. 309 – 322, 2013. ISSN 0022-0396. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002203961200318X>>.
- 62 ARROWSMITH, D. K.; PLACE, C. M. *An introduction to dynamical systems*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1994.
- 63 ALVES, J. F.; ARAÚJO, V. Hyperbolic times: frequency versus integrability. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, Cambridge University Press, v. 24, n. 2, p. 329–346, 2004.
- 64 BROWN, R.; BRYANT, P.; ABARBANEL, H. D. I. Computing the lyapunov spectrum of a dynamical system from an observed time series. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 43, p. 2787–2806, Mar 1991. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.43.2787>>.
- 65 LAI, Y.-C. et al. How often are chaotic saddles nonhyperbolic? *Nonlinearity*, v. 6, n. 779, 1993.
- 66 ANISHCHENKO, V. S. et al. Studying hyperbolicity in chaotic systems. *Phys. Lett. A*, n. 207, p. 301–307, 2000.
- 67 KUPTSOV, P. V.; KUZNETSOV, S. P. Violation of hyperbolicity in a diffusive medium with local hyperbolic attractor. *Phys. Rev. E*, v. 80, n. 016205, 2009.
- 68 SALA, M.; MANCHEIN, C.; ARTUSO, R. Estimating hyperbolicity of chaotic bidimensional maps. *Int. J. Bifurcat. Chaos*, v. 22, p. 1250217, 2012.
- 69 KUPTSOV, P. V.; PARLITZ, U. Theory and computation of covariant Lyapunov vectors. *J Nonlinear Sci. Appl.*, v. 22, p. 727–762, 2012.

- 70 KUPTSOV, P. V.; KUZNETSOV, S. P. Numerical test for hyperbolicity in chaotic systems with multiple time delays. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, v. 56, p. 227 – 239, 2018.
- 71 DAWSON, S. et al. Obstructions to shadowing when a Lyapunov exponent fluctuates about zero. *Phys. Rev. Lett.*, v. 73, p. 1927–1930, 1994.
- 72 FROESCHLÉ, C.; GONCZI, R.; LEGA, E. The fast Lyapunov indicator: a simple tool to detect weak chaos. application to the structure of the main asteroidal belt. *Planet. Space Sci.*, v. 45, p. 881–886, 1997.
- 73 HALLER, G. Distinguished material surfaces and coherent structures in three-dimensional fluid flows. *Physica D*, v. 149, p. 248–277, 2001.
- 74 MALAGOLI, A.; PALADIN, G.; VULPIANI, A. Transition to stochasticity in Hamiltonian systems: Some numerical results. *Phys. Rev. A*, v. 34, p. 1550–1555, 1986.
- 75 SILVA, R. M. da et al. Characterizing weak chaos using time series of Lyapunov exponents. *Phys. Rev. E*, v. 91, p. 062907, 2015.
- 76 PERKO, L. *Differential equations and dynamical systems*. [S.l.]: Springer, 2001.
- 77 DEVANEY, R. L. *An introduction to chaotic dynamical systems*. [S.l.]: Addison-Wesley, 1989.
- 78 LICHTENBERG, A. J.; LIEBERMAN, M. A. *Regular and chaotic dynamics*. [S.l.]: Springer, 1992.
- 79 GOLDSTEIN, H.; POOLE, C. P. *Classical mechanics*. [S.l.]: Pearson, 2002.
- 80 ARNOLD, V. I. *Mathematical methods of classical mechanics*. [S.l.]: Springer, 1978.
- 81 CORNFELD, S. V. F. I. P.; SINAI, Y. G. *Ergodic theory*. [S.l.]: Springer-Verlag New York, 1982. ISBN 978-1-4615-6929-9.
- 82 CROVISIER, S.; POTRIE, R. Introduction to partially hyperbolic dynamic. Notes for a minicourse in the School on Dynamical Systems 2015 at ICTP. 2015.
- 83 BARREIRA, L.; PESIN, Y. Linear theory. In: \_\_\_\_\_. *Nonuniform Hyperbolicity: Dynamics of Systems with Nonzero Lyapunov Exponents*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications), p. 7–8.
- 84 GINELLI HUGUES CHATÉ, R. L. F.; POLITI, A. Covariant lyapunov vectors. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 46, n. 25, 2013.
- 85 GINELLI F.; POGGI, P. T. A. C. H. L. R. . P. A. Characterizing dynamics with covariant lyapunov vectors. *Phys. Rev. Lett.*, v. 99, p. 130601, 2007.
- 86 KUZNETSOV, S. P.; KRUGLOV, V. P. Verification of hyperbolicity for attractors of some mechanical systems with chaotic dynamics. *Regul. Chaotic Dyn.*, v. 21, p. 160–174, 2016.
- 87 BEIMS, M. W.; GALLAS, J. A. C. Alignment of lyapunov vectors: A quantitative criterion to predict catastrophes. *Scientific Reports*, v. 6, n. 37102, 2016.

- 88 BEIMS, M. W.; GALLAS, J. A. C. Manifold angles, the concept of self-similarity and angle-enhanced bifurcation diagrams. *Scientific Reports*, v. 6, n. 18859, 2016.
- 89 MEYER, K. R.; SELL, G. R. An analytic proof of the shadowing lemma. *Funkcialaj Ekvacioj*, v. 30, p. 127–133, 1987.
- 90 FROYLAND THORSTEN HULS, G. P. M. G.; WATSON, T. M. Computing covariant lyapunov vectors, oseledets vectors, and dichotomy projectors: A comparative numerical study. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 247, p. 18–39, 2013.
- 91 WOLFE, C.; SAMELON, R. M. An efficient method for recovering lyapunov vectors from singular vectors. *Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography*, v. 59, p. 355–366, 2007.
- 92 TAKEUCHI, K. A.; GINELLI, F.; CHATÉ, H. Lyapunov analysis captures the collective dynamics of large chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, v. 103, p. 154103, 2009.
- 93 BOSETTI, H.; POSCH, H. A. Covariant Lyapunov vectors for rigid disk systems. *Chem. Phys.*, v. 375, p. 296–308, 2010.
- 94 TAKEUCHI, K. A. et al. Hyperbolic decoupling of tangent space and effective dimension of dissipative systems. *Phys. Rev. E*, v. 84, p. 046214, 2011.
- 95 XU, M.; PAUL, M. R. Covariant Lyapunov vectors of chaotic rayleigh-bénard convection. *Phys. Rev. E*, v. 93, p. 062208, 2016.
- 96 BEIMS, M. W.; GALLAS, J. A. C. Predictability of spiking and bursting in complex chemical reactions. *Chaos*, v. 20, p. 18539, 2018.
- 97 SHUB, M. *Global stability of dynamical systems*. [S.l.]: Springer-Verlag New York, 1987.
- 98 HERTZ, J. R. H. F. R.; URES, R. *Partially hyperbolic dynamics*. [S.l.]: Publicações Matemáticas do IMPA, 2011.
- 99 HENON, M.; G., H. The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments. *Astronomical Journal*, v. 69, p. 73, 1964.
- 100 CHANG, M. T. Y. F.; WEISS, J. Analytic structure of the hénon-heiles hamiltonian in integrable and nonintegrable regimes. *J. Math. Phys.*, v. 23, p. 531–538, 1982.
- 101 FORDY, A. P. The hénon-heiles system revisited. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 52, p. 204–210, 1991.
- 102 PRESS SAUL A. TEUKOLSKY, W. T. V. W. H.; FLANNERY, B. P. *Numerical recipes in Fortran*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1992.
- 103 BESSA, M.; DIAS, J. L. Generic dynamics of 4-dimensional c2 hamiltonian systems. *Communications in Mathematical Physics*, v. 281, n. 597, 2008.
- 104 SALA, M.; ARTUSO, R. Oseledets’ splitting of standard-like maps. *AIP Chaos*, v. 25, n. 023113, 2015.

- 105 PETROVICHEV, B. et al. Stochastic jets and nonhomogeneous transport in lagrangian turbulence. *Physics Letters A*, v. 150, n. 8, p. 391 – 396, 1990. ISSN 0375-9601. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037596019090237I>>.
- 106 BENKADDA, S. et al. Self-similarity and transport in the standard map. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 55, p. 4909–4917, May 1997. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.55.4909>>.
- 107 ZASLAVSKY, G. M.; EDELMAN, M.; NIYAZOV, B. A. Self-similarity, renormalization, and phase space nonuniformity of hamiltonian chaotic dynamics. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, v. 7, n. 1, p. 159–181, 1997. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.166252>>.
- 108 Froyland, G.; Padberg, K. Almost-invariant sets and invariant manifolds — Connecting probabilistic and geometric descriptions of coherent structures in flows. *Physica D Nonlinear Phenomena*, v. 238, n. 16, p. 1507–1523, ago. 2009.
- 109 WOLF, A. et al. Determining lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 16, n. 3, p. 285 – 317, 1985. ISSN 0167-2789. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167278985900119>>.
- 110 ALTMANN, E. G.; KANTZ, H. Hypothesis of strong chaos and anomalous diffusion in coupled symplectic maps. *Europhys. Lett.*, v. 78, p. 10008, 2007.
- 111 FROESCHLÉ, C. A numerical study of the stochasticity of dynamical systems with two degrees of freedom. *Astron. Astrophys.*, v. 4, p. 15–23, 1970.
- 112 FROESCHLÉ, C. Numerical study of a four dimensional mapping. *Astron. Astrophys.*, v. 16, p. 172–189, 1972.
- 113 KANEKO, K.; BAGLEY, R. J. Arnold diffusion, ergodicity and intermittency in a coupled standard mapping. *Phys. Lett. A*, v. 110, n. 9, p. 435 – 440, 1985.
- 114 SILVA, R. M. da; BEIMS, M. W.; MANCHEIN, C. Recurrence-time statistics in non-Hamiltonian volume-preserving maps and flows. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 92, p. 022921, Aug 2015.

## Apêndices



---

## A. Esquemas numéricos

---

### A.1 Algoritmo dinâmico para o cálculo dos CLVs

Consideremos a aplicação  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  a tempo discreto  $n \in \mathbb{Z}$ . O estado no tempo  $n$  é representado pelo vetor  $x_n \in \mathbb{R}^N$ . Denotemos por  $\Gamma_{0,\tau}$  a trajetória desde o estado  $x_0$  a  $x_\tau$ , isto é

$$\Gamma_{0,\tau} = \{x_0, x_1, \dots, x_\tau\}, \quad x_{n+1} = f(x_n). \quad (\text{A.1})$$

O operador de evolução no espaço tangente  $D_{x_n} f^\tau : T_{x_n} M \rightarrow T_{x_{\tau+n}} M$  pode ser representado através da seguinte matriz

$$\mathbf{M}_{\tau,n} = \prod_{i=n}^{\tau+n-1} \mathbf{J}(x_i), \quad \mathbf{J}(x_n) = \frac{\partial f(x_n)}{\partial x_n} \quad (\text{A.2})$$

onde  $\mathbf{J}(x_n)$  é o Jacobiano no ponto  $x_n$ . Assim, seja  $\mathbf{g}_0$  uma condição inicial no espaço tangente, então a equação que governa a sua evolução durante um tempo  $\tau$  é

$$\mathbf{g}_\tau = \mathbf{M}_{\tau,0} \mathbf{g}_0. \quad (\text{A.3})$$

É claro que se o sistema é contínuo, este é discretizado ao resolver numericamente as equações de movimento, tanto no espaço de fase como no espaço tangente. Como regra, deve-se escolher intervalos de tempo pequenos o suficiente em comparação com as oscilações relevantes dos sistemas.

O algoritmo dinâmico esquematizado por Ginelli é um dos métodos mais utilizados para o cômputo dos CLVs, estes são calculados através de uma regra dinâmica estável, baseado na informação obtida na dinâmica para frente e a dinâmica para trás.

A informação na evolução para frente é obtida através do bem conhecido algoritmo por Benettin para o cômputo do espectro de Lyapunov [52, 109]. A ideia é acompanhar a evolução de volumes no espaço tangente, porém, temos que levar em conta o fato de que quase todo vetor inicial convergirá exponencialmente para a direção de maior expansão, isto é

$$\|\mathbf{M}_{\tau,n} \tilde{\mathbf{g}}_m^{(i)} - \mathbf{M}_{\tau,n} \tilde{\mathbf{g}}_m^{(j)}\| \rightarrow 0, \quad \tau \gg 1, \quad e \quad \forall i, j. \quad (\text{A.4})$$

Em consequência, tomando dois vetores quaisquer,  $i$  e  $j$ , rapidamente eles serão numericamente indistinguíveis. Para resolver este problema precisa-se ortonormalizar periodicamente a base do espaço tangente durante a evolução. No entanto, excepto pela direção relacionada ao maior expoente de Lyapunov, o procedimento de ortonormalização destrói a informação das direções relacionadas aos outros expoentes de Lyapunov.

Consideramos uma matriz ortogonal cujos vetores colunas formam uma base ortogonal no espaço tangente.

$$\mathbf{G}_n = \left( \mathbf{g}_n^{(1)} \middle| \mathbf{g}_n^{(2)} \middle| \cdots \middle| \mathbf{g}_n^{(N)} \right), \quad \langle \mathbf{g}_n^{(i)} | \mathbf{g}_n^{(j)} \rangle = \delta_{ij}, \quad (\text{A.5})$$

onde  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  representa o produto interno e  $\delta_{ij}$  sendo a delta de Kronecker. Então a evolução desta base esta dada por

$$\tilde{\mathbf{G}}_{n+\tau} = \mathbf{M}_{\tau,n} \mathbf{G}_n \quad (\text{A.6})$$

onde  $\tilde{\mathbf{G}}_{n+\tau} = \left( \tilde{\mathbf{g}}_{n+\tau}^{(1)} \middle| \tilde{\mathbf{g}}_{n+\tau}^{(2)} \middle| \cdots \middle| \tilde{\mathbf{g}}_{n+\tau}^{(N)} \right)$  é uma matriz *não-ortonormal*. Obtemmos a informação da evolução através de uma decomposição  $\mathbf{QR}$  em cada tempo  $\tau$  da matriz  $\tilde{\mathbf{G}}_{n+\tau}$

$$\tilde{\mathbf{G}}_{n+\tau} = \mathbf{G}_{n+\tau} \mathbf{R}_{\tau,n}, \quad (\text{A.7})$$

onde  $\mathbf{G}_{n+\tau}$  é construído por vetores coluna ortonormais em  $x_{n+\tau}$  e  $\mathbf{R}_{\tau,n}$  é uma matriz diagonal superior, que contém a informação obtida pelo procedimento de ortonormalização da matriz *não-ortonormal*  $\tilde{\mathbf{G}}_{n+\tau}$

$$\mathbf{R}_{\tau,n} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{g}_{n+\tau}^{(1)} | \tilde{\mathbf{g}}_{n+\tau}^{(1)} \rangle & \langle \mathbf{g}_{n+\tau}^{(1)} | \tilde{\mathbf{g}}_{n+\tau}^{(2)} \rangle & \cdots & \langle \mathbf{g}_{n+\tau}^{(1)} | \tilde{\mathbf{g}}_{n+\tau}^{(N)} \rangle \\ 0 & \langle \mathbf{g}_{n+\tau}^{(2)} | \tilde{\mathbf{g}}_{n+\tau}^{(2)} \rangle & \cdots & \langle \mathbf{g}_{n+\tau}^{(2)} | \tilde{\mathbf{g}}_{n+\tau}^{(N)} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \langle \mathbf{g}_{n+\tau}^{(N)} | \tilde{\mathbf{g}}_{n+\tau}^{(N)} \rangle \end{bmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Os elementos diagonais  $[\mathbf{R}]_{i,i} = r_{\tau,n}^{(i)}$  definem as taxas de crescimento exponencial local ao longo do tempo  $\tau$  dos vetores ortonormais  $\mathbf{G}_n$ . Portanto, o espectro de Lyapunov pode ser calculado tomando a média temporal dos logaritmos desses termos diagonais

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{h=0}^{t-1} \ln \left( r_{\tau,n+h\tau}^{(i)} \right). \quad (\text{A.9})$$

Em aplicações numéricas,  $\tau$  não deve ser um número grande para não produzir erros computacionais ou problemas de precisão na *decomposição QR* de  $\tilde{\mathbf{G}}_{n+\tau}$ , em particular, para o mapa padrão a decomposição foi computada para todo tempo, enquanto para o sistema contínuo de Hénon-Heiles foi computada em cada passo de integração numérica (Runge-Kutta de quarta ordem com passo de integração constante  $h = 0,1$ ).

Os vetores coluna ortonormais  $\mathbf{G}_n$  evoluindo sob a equação (A.7) são conhecidos como *vetores de Gram-Schmidt para frente*, ou simplesmente vetores de Gram-Schmidt (VGS). Em geral, eles não dependem da condição inicial  $x_n$  a partir da qual o procedimento de ortonormalização foi iniciado, porém, para  $\tau - n$  suficientemente grande, esses vetores convergem a uma direção bem conhecida que só depende de  $x_n$ .

A informação das outras direcções de expansão (contração) associadas aos expoentes de Lyapunov, pode ser obtida na evolução para trás. Primeiramente vamos supor que ao longo de uma trajetória calculamos os vetores de Gram Schmidt,  $\{\mathbf{g}_n^{(i)}\}$ . *Implicando na necessidade de um tempo transiente no qual o procedimento de ortonormalização de Gram-Schmidt é computado, isto assegura que a base  $\mathbf{G}_n$  converge às direcções dos VGS corretas.*

O  $i$ -ésimo CLV,  $v_n^{(i)} \in E_x^{(i)}$ , será contido no subespaço formado pelos primeiros  $j$  VGS, assim, os CLVs podem ser expressos como

$$v_n^{(i)} = \sum_{j=1}^i c_n^{(j,i)} \mathbf{g}_n^{(j)}, \quad (\text{A.10})$$

onde  $c^{(j,i)} = \langle \mathbf{g}_n^{(j)} | v_n^{(i)} \rangle$  com  $j \leq i$  são os coeficientes de expansão dos CLVs no tempo  $n$ , cômputado na evolução para trás. Vemos que por construção, o primeiro CLVs coincide com o primeiro vetor da base gerada pelos VGS e os CLVs são definidos por um sinal irrelevante (sua orientação não está definida). Seja  $\mathbf{V}_n$  a matriz cujo vetores coluna são os CLVs no tempo  $n$

$$\mathbf{V}_n = \left( v_n^{(1)} \middle| v_n^{(2)} \middle| \dots \middle| v_n^{(N)} \right). \quad (\text{A.11})$$

Os CLVs evoluem de acordo com

$$\mathbf{M}_{\tau,n} \mathbf{V}_n = \mathbf{V}_{n+\tau} \mathbf{D}_{\tau,n}, \quad (\text{A.12})$$

onde a matriz diagonal  $\mathbf{D}_{n+\tau}$  esta composta dos fatores de crescimento local, isto é

$$\gamma_{\tau,n}^{(i)} = \|\mathbf{M}_{\tau,n} v_n^{(i)}\|, \quad [\mathbf{D}_{\tau,n}]_{i,j} = \delta_{i,j} \gamma_{\tau,n}^{(i)}, \quad (\text{A.13})$$

com  $\tau$  pequeno, a taxa logaritmica destes fatores definem os expoentes de Lyapunov a tempo finito

$$\lambda_{\tau,n}^{(i)} = \frac{1}{\tau} \log \gamma_{\tau,n}^{(i)}, \quad (\text{A.14})$$

a taxa assintótica de crescimento exponencial é o expoente de Lyapunov assintótico  $\lambda^{(i)}$ . Por simplicidade, vamos assumir que o espectro é não degenerado, portanto todos os CLVs podem ser encontrados (salvo um sinal) univocamente. Escrevemos a equação (A.10) em forma de matriz

$$\mathbf{V}_n = \mathbf{G}_n \mathbf{C}_n, \quad (\text{A.15})$$

onde a matriz triangular superior  $\mathbf{C}_n$  (normalizada por colunas) contém os coeficientes de expansão dos CLVs na base dos VGS

$$[\mathbf{C}_n]_{j,i} = c_n^{(j,i)}, \quad \text{para} \quad j \leq i \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^i (c_n^{(j,i)})^2 = 1 \quad \forall i. \quad (\text{A.16})$$

Assim, com os coeficientes  $\mathbf{C}_n$  (obtida na evolução para trás) e os VGS  $\mathbf{G}_n$  (obtidos na evolução para frente), podemos contruir os vetores covariantes de Lyapunov e os ângulos entre estes.

Finalmente, a dinâmica para obter os coeficientes  $\mathbf{C}_n$  pode ser encontrada usando a equação (A.7) para reescrever a equação (A.12) como

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{\tau,n} \mathbf{V}_n &= \mathbf{M}_{\tau,n} \mathbf{G}_n \mathbf{C}_n = \mathbf{G}_{n+\tau} \mathbf{R}_{\tau,n} \mathbf{C}_n, \\ &= \mathbf{V}_{n+\tau} \mathbf{D}_{\tau,n} = \mathbf{G}_{n+\tau} \mathbf{C}_{n+\tau} \mathbf{D}_{\tau,n},\end{aligned}\tag{A.17}$$

o que implica

$$\mathbf{C}_n = \mathbf{R}_{\tau,n}^{-1} \mathbf{C}_{n+\tau} \mathbf{D}_{\tau,n}.\tag{A.18}$$

Esta é a equação fundamental da evolução para trás, mostrando que os CLVs podem ser facilmente evoluídos para trás multiplicando o inverso da matriz triangular superior  $\mathbf{R}_{\tau,n}^{-1}$ , onde  $\mathbf{R}_{\tau,n}$  é um "bi-produto" da dinâmica para frente dos VGS (A.7). De forma similar que no início do algoritmo, *precisamos de um tempo transiente para obter os coeficientes corretos da matriz  $\mathbf{C}_n$ .*

A seguir apresentamos, de esquemática, os principais passos do código numérico para computar os vetores covariantes de Lyapunov para os sistema de Hénon-Heiles.

## PROGRAMA CLVs

*comentário* **CI** (determina as condições iniciais)

*comentário* **EDO** (integrador de equações diferenciais ordinárias)

*comentário* **GS** (ortonormaliza a base  $\tilde{\mathbf{G}}$  e determina a matriz  $\mathbf{R}$ ,  $\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G}\mathbf{R}$ )

*comentário* **LEs** (detemina o espectro de Lyapunov com os elementos da diagonal de  $\mathbf{R}$ )

*comentário* **CRC** (determina a matriz  $\tilde{\mathbf{C}}$  da equação  $\mathbf{C}_n = \mathbf{R}_{1,n}^{-1} \mathbf{C}_{n+1}$ )

*comentário* **CD** (determina a matriz  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$  usando a matriz  $\tilde{\mathbf{C}}$ )

*comentário* **Ang\_D** (determina os ângulos entre os CLV,  $\theta_n^{ij}$ , através da sua relação com os vetores de Gram Schmidt e considerando  $\langle \mathbf{g}_n^{(i)} | \mathbf{g}_n^{(j)} \rangle = \delta_{ij}$ , também cômputa os FTLE a um passo através dos elemetos diagonais da matriz  $\mathbf{D}$ )

*comentário* **FTLE** (determina os FTLE para um tempo maior usando os FTLE para um tempo de passo de integração)

*comentário* **FTA** (determina a média dos ângulos entre os CLVs usando os ângulos locais)

*comentário* **Statistic** (faz a estatística dos FTLE e os ângulos médios)

## Definição das variáveis

## Definição dos parâmetros

**call CI**

**do loop** das CI

**do loop** dinâmica para frente (tempo transiente)

**call** EDO

**call** GS

**end do loop**

**do loop** dinâmica para frente

```

    call EDO
    call GS
    save trajetoria e elementos da matriz  $\mathbf{R}_n$  para todos os passos
end do loop

call LEs  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 

if ( $\lambda_1 \geq \epsilon$ ) then
    do loop dinâmica para trás (tempo transiente)
        call CRC
        call CD
    end do loop

    do loop dinâmica para trás
        call CRC
        call CD
        call Ang_D
        save ângulos locais e os FTLE a cada passo
    end do loop

    call FTLE
    call FTA
    call Statistic

end if
end do loop

```

## A.2 Recorrências do CLVs para o mapa padrão

Nesta seção construímos em detalhe as recorrências para o cálculo da decomposição de Oseledec (gerado pelos CLVs) do mapa padrão. Esta construção é baseada no algoritmo de Ginelli [84, 85]. Desta maneira, o cálculo se torna bem mais leve computacionalmente, além de eliminar o erro produzido pelo procedimento de ortogonalização de Gram Schmidt e economizar memória computacional.

A construção das recorrências é aplicada para cada uma das trajetórias caóticas. O esquema será dividido em duas partes: (1) as relações de recorrências que dependem da evolução para a frente, e (2) as relações que dependem da evolução para trás. A primeira parte é praticamente o esquema de Benetti para o cálculo do espectro de Lyapunov assintótico.

### A.2.1 Construção das relações de recorrências para a evolução para frente

- (I) Fixamos o parâmetro de estocasticidade  $k > 0$  e a condição inicial  $x_0 = \{z_0, p_0\} \in \Lambda$ . É claro que as primeiras relações de recorrências são fornecidas pela aplicação do mapa

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n + k \sin z_n \quad (\text{mod } 2\pi) \\ z_{n+1} &= z_n + p_{n+1}. \quad (\text{mod } 2\pi) \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

- (II) Evoluímos o mapa por um tempo suficientemente grande. Para cada ponto da trajetória  $x_n$ , a Jacobiana associada é calculada

$$\mathbf{J}_n \equiv \mathbf{J}(x_n) = \begin{bmatrix} 1 & k \sin z_n \\ 1 & 1 + k \sin z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k_n \\ 1 & 1 + k_n \end{bmatrix}, \quad (\text{A.20})$$

onde por simplicidade, definimos  $k_n = k \sin(x_n)$ .

- (III) Assumimos que para o ponto da trajetória  $x_n$ , no tempo  $t_n$ , encontramos o conjunto dos VGS,  $\{\mathbf{g}_0^1, \mathbf{g}_0^2\}$ , de (A.5) e sabendo que  $\langle \mathbf{g}_0^i | \mathbf{g}_0^j \rangle = \delta_{ij}$ , a matriz  $\mathbf{G}_n$  pode ser descrita através da seguinte matriz ortonormal

$$\mathbf{G}_n = [\mathbf{g}_0^1, \mathbf{g}_0^2] = \begin{bmatrix} \cos \phi_n & -\sin \phi_n \\ \sin \phi_n & \cos \phi_n \end{bmatrix}. \quad (\text{A.21})$$

- (IV) A matriz Jacobiana  $\mathbf{J}_n$  é equivalente ao mapeamento linear no espaço tangente para um passo, isto é

$$\mathbf{J}_n \equiv \mathbf{M}_{1,n} : T_{x_n} M \rightarrow T_{f^1(x_n)} M \quad (\text{A.22})$$

Seja  $\tilde{\mathbf{G}}_{n+1}$  a matriz representando a evolução dos vetores  $\mathbf{G}_n$  por um tempo  $n = 1$ , isto é  $\tilde{\mathbf{G}}_{n+1} = \mathbf{J}_n \mathbf{G}_n$ . Fazendo o produto temos

$$\tilde{\mathbf{G}}_{n+1} = \begin{bmatrix} \cos \phi_n + k_n \sin \phi_n & k_n \cos \phi_n - \sin \phi_n \\ \cos \phi_n + (1 + k_n) \sin \phi_n & (1 + k_n) \cos \phi_n - \sin \phi_n \end{bmatrix} = [\tilde{\mathbf{g}}_{n+1}^1, \tilde{\mathbf{g}}_{n+1}^2], \quad (\text{A.23})$$

onde  $\tilde{\mathbf{g}}_{n+1}^1$  e  $\tilde{\mathbf{g}}_{n+1}^2$  são vetores coluna.

- (V) A matriz  $\tilde{\mathbf{G}}_n$  contém a informação de expansão e contração dos vetores  $\{\mathbf{g}_n^1, \mathbf{g}_n^2\}$  e os novos VGS,  $\{\mathbf{g}_{n+1}^1, \mathbf{g}_{n+1}^2\}$ , no ponto  $x_{n+1}$ . Para tirar a informação utilizando o procedimento de decomposição de matrizes  $\mathbf{QR}$ , onde  $\mathbf{Q}$  é uma matriz ortonormal e a matriz  $\mathbf{R}$  é uma matriz diagonal superior. Então

$$\tilde{\mathbf{G}}_{n+1} = \mathbf{G}_{n+1} \mathbf{R}_{1,n}. \quad (\text{A.24})$$

Pode-se demonstrar mediante a aplicação direta do método de Gram Schmidt, que a matriz  $\mathbf{G}_{n+1}$  é realmente a matriz representando os VGS,  $\{\mathbf{g}_{n+1}^1, \mathbf{g}_{n+1}^2\}$ , no ponto  $x_n$ . Analogamente a (A.21), a matriz  $\mathbf{G}_{n+1}$  pode ser escrita como

$$\mathbf{G}_{n+1} = [\mathbf{g}_{n+1}^1, \mathbf{g}_{n+1}^2] = \begin{bmatrix} \cos \phi_{n+1} & -\sin \phi_{n+1} \\ \sin \phi_{n+1} & \cos \phi_{n+1} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.25})$$

Agora isolamos  $\mathbf{R}_{1,n}$  aproveitando a ortonormalidade da matriz  $\mathbf{G}_{n+1}$ , sendo sua inversa simplesmente sua transposta, então

$$\mathbf{R}_{1,n} = \mathbf{G}_{n+1}^T \tilde{\mathbf{G}}_{1,n}, \quad (\text{A.26})$$

ou de forma explícita

$$\mathbf{R}_{1,n} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{g}_{n+1}^{(1)} | \tilde{\mathbf{g}}_{n+1}^{(1)} \rangle & \langle \mathbf{g}_{n+1}^{(1)} | \tilde{\mathbf{g}}_{n+1}^{(2)} \rangle \\ 0 & \langle \mathbf{g}_{n+1}^{(2)} | \tilde{\mathbf{g}}_{n+1}^{(2)} \rangle \end{bmatrix}. \quad (\text{A.27})$$

Sendo esta a mesma matriz da equação do Ginelli (A.18) no cálculo dos CLVs. É claro que a diagonal da matriz  $\mathbf{R}_{1,n}$  contém a informação de quanto os VGS são expandidos e contraídos sob a evolução no espaço de fase para uma iterada. Denotemos esta taxa de expansão por  $r_{1,n}^{(j)}$ .

$$\mathbf{R}_{1,n} = \begin{bmatrix} r_{1,n}^{(1)} & r_{1,n}^{(12)} \\ 0 & r_{1,n}^{(2)} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.28})$$

Essas taxas foram esquematizadas por Benetti para o cálculo do espectro de Lyapunov assintótico, equação (A.9). Agora, com a informação encontrada nos itens anteriores, podemos obter as seguintes relações de recorrências.

- (VI) Encontremos  $r_{1,n}^{(1)}$  desenvolvendo o primeiro termino na diagonal (A.27). Do algoritmo de Benetti e o procedimento de Gram-Schmidt, os vetores  $\mathbf{g}_{n+1}^{(1)}$  e  $\tilde{\mathbf{g}}_{n+1}^{(1)}$  são paralelos, portanto

$$r_{1,n}^{(1)} = \langle \mathbf{g}_{n+1}^{(1)} | \tilde{\mathbf{g}}_{n+1}^{(1)} \rangle = \|\mathbf{g}_{n+1}^{(1)}\| \|\tilde{\mathbf{g}}_{n+1}^{(1)}\| = \|\tilde{\mathbf{g}}_{n+1}^{(1)}\|, \quad (\text{A.29})$$

onde por definição  $\|\mathbf{g}_{n+1}^{(1)}\| = 1$ . De (A.23) obtemos  $r_{1,n}^{(1)}$  em função do ângulo  $\phi_n$

$$r_{1,n}^{(1)} = \|\tilde{\mathbf{g}}_{n+1}^{(1)}\| = \sqrt{(\cos \phi_n + k_n \sin \phi_n)^2 + (\cos \phi_n + (1 + k_n) \sin \phi_n)^2} \quad (\text{A.30})$$

- (VII) Como  $r_{1,n}^{(1)}$  depende do ângulo  $\phi_n$ , devemos encontrar as relações de recorrência para  $\cos \phi_n$  e  $\sin \phi_n$ . Para isto, vemos que por definição no procedimento de ortonormalização de Gram Schmidt temos

$$\mathbf{g}_{n+1}^{(1)} = \frac{\tilde{\mathbf{g}}_{n+1}^{(1)}}{\|\tilde{\mathbf{g}}_{n+1}^{(1)}\|} = \frac{\tilde{\mathbf{g}}_{n+1}^{(1)}}{r_{1,n}^{(1)}} \quad \rightarrow \quad \tilde{\mathbf{g}}_{n+1}^{(1)} = r_{1,n}^{(1)} \mathbf{g}_{n+1}^{(1)} \quad (\text{A.31})$$

E pela equação (A.23) chegamos a outras duas relações de  $\phi_n$

$$\cos \phi_{n+1} = \frac{\cos \phi_n + k_n \sin \phi_n}{r_{1,n}^{(1)}}, \quad \sin \phi_{n+1} = \frac{\cos \phi_n + (1 + k_n) \sin \phi_n}{r_{1,n}^{(1)}}. \quad (\text{A.32})$$

(VIII) Para o termo  $r_{1,n}^{(2)}$ , usando a matriz de bi-produto (A.27) e fazendo álgebra obtemos

$$r_{1,n}^{(2)} = \frac{1}{r_{1,n}^{(1)}}. \quad (\text{A.33})$$

Com a ajuda dessas recorrências para frente, podemos calcular o espectro de Lyapunov como segue

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)} &= \lambda_{\infty,n}^{(1)} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\tau-1} \log r_{1,n+j}^{(1)} = \lambda \\ \lambda^{(2)} &= \lambda_{\infty,n}^{(2)} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\tau-1} \log r_{1,n+j}^{(2)} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\tau-1} \log \left( \frac{1}{r_{1,n+j}^{(1)}} \right) = -\lambda. \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

(IX) A última relação a ser encontrada que depende da evolução para diante é  $r_{1,n}^{(12)}$ , similarmente usando a matriz bi-produto (A.27), então

$$\begin{aligned} r_{1,n}^{(12)} &= \cos \phi_{n+1} (k_n \cos \phi_n - \sin \phi_n) - \sin \phi_{n+1} (\sin \phi_n - (1 + k_n) \cos \phi_n) \\ &= [(1 + 2k_n) (\cos^2 \phi_n - \sin^2 \phi) + (2k_n^2 + 2k_n - 1) \cos \phi \sin \phi] / r_{1,n}^{(1)} \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

## A.2.2 Construção das relações de recorrências para a evolução para trás

Continuando com a construção das relações de recorrência no cômputo dos CLVs, encontremos aquelas que dependem da evolução para trás no tempo. Para isso, com as recorrências já encontradas, apliquemos a equação fundamental de Ginelli (A.18) ao mapa padrão.

Seja a matriz  $\mathbf{V}_n$  representando a matriz cuja colunas contêm os CLVs no ponto  $x_n$ , através da base ortonormal gerada pelos VGS, podemos escrever  $\mathbf{V}_n$  na sua forma matricial como  $\mathbf{V}_n = \mathbf{G}_n \mathbf{C}_n$ , onde a matriz triangular superior  $\mathbf{C}_n$  (normalizada por colunas) contém os coeficientes de expansão, que para o mapa padrão implica

$$\begin{aligned} v_n^{(1)} &= \mathbf{g}_n^{(1)} \\ v_n^{(2)} &= \cos \theta'_n \mathbf{g}_n^{(1)} + \sin \theta'_n \mathbf{g}_n^{(2)}. \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{C}_n = \begin{bmatrix} 1 & \cos \theta'_n \\ 0 & \sin \theta'_n \end{bmatrix}. \quad (\text{A.36})$$

onde  $\|v_n^{(i)}\| = 1$ ,  $\|\mathbf{g}_n^{(i)}\| = 1$  e  $\langle \mathbf{g}_n^{(i)} | \mathbf{g}_n^{(j)} \rangle = \delta_{ij}$ . A equação fundamental da evolução para trás de Ginelli (A.18) para uma iteração é

$$\mathbf{C}_n = \mathbf{R}_{1,n}^{-1} \mathbf{C}_{n+1} \mathbf{D}_{1,n}, \quad (\text{A.37})$$



onde a matriz diagonal  $\mathbf{D}_{n+\tau}$  esta composta dos fatores de crescimento local dos CLV, isto é

$$\gamma_{1,n}^{(i)} = \|\mathbf{M}_{1,n} v_n^{(i)}\|, \quad [\mathbf{D}_{1,n}]_{i,j} = \delta_{i,j} \gamma_{1,n}^{(i)}. \quad (\text{A.38})$$

Essas taxas definem os *expoentes de Lyapunov locais* como  $\lambda_{1,n}^{(j)} = \log \gamma_{1,n}^{(j)}$ . Assim, nossa tarefa será encontrar as relações de recorrências para  $\lambda_{1,n}^{(j)}$ , que vão depender de  $\cos \theta'_n$  e  $\sin \theta'_n$ .

(X) Como já obtivemos a matriz  $\mathbf{R}_{1,n}$ , podemos calcular a sua inversa diretamente

$$\mathbf{R}_{1,n} = \begin{bmatrix} r_{1,n}^{(1)} & r_{1,n}^{(12)} \\ 0 & 1/r_{1,n}^{(1)} \end{bmatrix} \rightarrow (\mathbf{R}_{1,n})^{-1} = \begin{bmatrix} 1/r_{1,n}^{(1)} & -r_{1,n}^{(12)} \\ 0 & r_{1,n}^{(1)} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.39})$$

(XI) Vamos assumir que encontramos o ângulo  $\theta'$  certo através da iteração da equação de Ginelli (A.18) por um tempo transiente suficientemente grande e substituindo as matrizes (A.39) e (A.38)

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_n (\mathbf{D}_{1,n})^{-1} &= \mathbf{R}_{1,n}^{-1} \mathbf{C}_{n+1}; \\ \begin{bmatrix} 1 & \cos \theta'_n \\ 0 & \sin \theta'_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{1,n}^{(1)} & 0 \\ 0 & \gamma_{1,n}^{(2)} \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} 1/r_{1,n}^{(1)} & -r_{1,n}^{(12)} \\ 0 & r_{1,n}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cos \theta'_{n+1} \\ 0 & \sin \theta'_{n+1} \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} 1/\gamma_{1,n}^{(1)} & \cos \theta'_n / \gamma_{1,n}^{(2)} \\ 0 & \sin \theta'_n / \gamma_{1,n}^{(2)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1/r_{1,n}^{(1)} & \cos \theta'_{n+1} / r_{1,n}^{(1)} - r_{1,n}^{(12)} \sin \theta'_{n+1} \\ 0 & r_{1,n}^{(1)} \sin \theta'_{n+1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

Para encontrar  $\gamma_{1,n}^{(j)}$  igualamos as normas das colunas

$$\begin{aligned} \gamma_{1,n}^{(1)} &= r_{1,n}^{(1)}, \\ \gamma_{1,n}^{(2)} &= \left[ \left( \cos \theta'_{n+1} / r_{1,n}^{(1)} - r_{1,n}^{(12)} \sin \theta'_{n+1} \right)^2 + \left( r_{1,n}^{(1)} \sin \theta'_{n+1} \right)^2 \right]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

(XII) Encontremos as relações de recorrências para o ângulo  $\theta_n$ , Na equação (A.40) multiplicamos  $\gamma_{1,n}^{(2)}$  em ambos lados e igualando obtemos

$$\begin{aligned} \cos \theta'_n &= \gamma_{1,n}^{(2)} \left( \frac{\cos \theta'_{n+1}}{r_{1,n}^{(1)}} - r_{1,n}^{(12)} \sin \theta'_{n+1} \right), \\ \sin \theta'_n &= \gamma_{1,n}^{(2)} r_{1,n}^{(1)} \sin \theta'_{n+1}. \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

(XII) Finalmente, podemos encontrar o menor *ângulo local* entre os CLVs,  $\angle \{v_n^{(1)}, v_n^{(2)}\} = \theta_n$  (que estudamos em detalhe). Usando a relação (A.10) e a ortonormalidade dos VGS

$$\langle v_n^{(1)} | v_n^{(2)} \rangle = \|v_n^{(1)}\| \|v_n^{(2)}\| \cos \theta_n = \langle \mathbf{g}_n^{(1)} | \mathbf{g}_n^{(1)} \rangle \cos \theta'_n. \quad (\text{A.43})$$

E portanto

$$\theta_n = \arccos (|| \cos \theta'_n ||) . \quad (\text{A.44})$$

Resumindo, os FTLEs e os ângulos médios para o mapa padrão podem ser obtidos através das taxas de expansão local  $\gamma_{1,n}^{(i)}$ ,  $r_{1,n}^{(1)}$  e do coeficiente de expansão  $\cos \theta'$ . Que podem ser calculadas através das relações de recorrências encontradas

$$\begin{aligned} \cos \phi_{n+1} &= \frac{\cos \phi_n + k_n \sin \phi_n}{r_{1,n}^{(1)}}, & \cos \theta'_n &= \gamma_{1,n}^{(2)} \left( \frac{\cos \theta'_{n+1}}{r_{1,n}^{(1)}} - r_{1,n}^{(12)} \sin \theta'_{n+1} \right), \\ \sin \phi_{n+1} &= \frac{\cos \phi_n + (1 + k_n) \sin \phi_n}{r_{1,n}^{(1)}}, & \sin \theta'_n &= \gamma_{1,n}^{(2)} r_{1,n}^{(1)} \sin \theta'_{n+1}. \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

e as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} r_{1,n}^{(1)} &= \sqrt{(\cos \phi_n + k_n \sin \phi_n)^2 + (\cos \phi_n + (1 + k_n) \sin \phi_n)^2}, \\ r_{1,n}^{(12)} &= [(1 + 2k_n) (\cos^2 \phi_n - \sin^2 \phi) + (2k_n^2 + 2k_n - 1) \cos \phi \sin \phi] / r_{1,n}^{(1)}, \\ \gamma_{1,n}^{(2)} &= \left[ \left( \cos \theta'_{n+1} / r_{1,n}^{(1)} - r_{1,n}^{(12)} \sin \theta'_{n+1} \right)^2 + \left( r_{1,n}^{(1)} \sin \theta'_{n+1} \right)^2 \right]^{-1/2}, \\ \theta_{l,n} &= \arccos (|| \cos \theta'_n ||) . \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

As relações de recorrência nos permitem reduzir o tempo de simulações e erros computacionais. Isto por que, o cálculo da Jacobiana, a ortonormalização e a inversa de Matrizes são transformadas em simples iterações. Além disso, os valores de várias recorrências não precisam ser guardadas, economizando memória computacional.